中学生文库



ZHONGXUESHENG WENKU

模糊数学

刘应明　任　平　编著

上海教育出版社

责任编辑　冯　贤
封面设计　范一辛

中学生文库　　　　模糊数学
刘应明　任　平　编著

上海教育出版社出版发行
（上海永福路 123 号）
各地新华书店经销　　上海崇明印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 3　插页 2　字数 51,000
1988 年 4 月第 1 版　1988 年 4 月第 1 次印刷
印数 1—11,800 本

ISBN 7-5320-0428-7/G·374　　定价：0.60 元

前言

有一个古老的希腊悖论，是这样说的：

“一粒种子肯定不叫一堆，两粒也不是，三粒也不是……另一方面，所有的人都同意，一亿粒种子肯定叫一堆．那么，适当的界限在哪里？我们能不能说，325647粒种子不叫一堆而325648粒就构成一堆？”

确实，“一粒”和“一堆”是有区别的两个概念．但是，它们的区别是逐渐的，而不是突变的，两者之间并不存在明确的界限．换句话说，“一堆”这个概念带有某种程度的模糊性．类似的概念，如年老、高个子、很大、很小、聪明、价廉物美等等，不胜枚举．

在人们的实际生活和工作中，能不能完全避免模糊性？为了回答这个问题，你只要找上几位好朋友聚在一起，那么，除非见面后就埋头演算数学习题，否则，用不上说几句话，保证得用上上述那类模糊概念．

精确和模糊，是一对矛盾．根据不同情况有时要求精确，有时要求模糊．比如打仗，指挥员下达命令：“拂晓发起

总攻.”这就乱套了．这时，一定要求精确：“×月×日清晨六时正发起总攻.”各个阵地的指挥员还要对对表，生怕出个半分十秒的误差．但是，物极必反．如果事事要求精确，人们就简直没有办法顺利地交流思想——两人见面，问：“你好吗？”可是，什么叫“好”，又有谁能给个精确的定义？

有些现象本质上就是模糊的，如果硬要使之精确，自然难以符合实际．例如，考核学生成绩，规定满60分为合格．但是，59分和60分之间究竟有多大差异，以致一分之差要区别为及格和不及格？根据是很不充分的．

另一方面，有些现象是精确的，但是，适当地模糊化可能使问题得到简化，灵活性大为提高．例如，在地里摘玉米，若要找一个最大的，那很麻烦，而且近乎迂腐．我们必须把玉米地里所有的玉米都测量一下，再加以比较才能确定．它的工作量和玉米地面积成正比．土地面积越大，工作越困难．然而，只要稍为改变一下问题的提法：不要求找最大的玉米，而是找比较大的，即按通常的说法，到地里摘个大玉米．这时，问题从精确变成了模糊，但同时也从不必要的复杂变成意外的简单，挑不多的几个就可以满足要求．工作量甚至和土地面积无关．因此，过分的精确实际成了迂腐，适当的模糊反而灵活．

很奇怪的是，直到本世纪中期，人们还一直把模糊看成贬义词．认识到模糊性的重要和积极意义，是科学史上的一件大事．这个功绩属于美国著名科学家查德（L. A. Zadeh）教授．查德在五十年代从事工程控制论的研究，六

十年代初期转而研究多目标决策问题. 长期以来，围绕决策、控制及其有关的一系列重要问题的研究，应用传统数学方法和现代电子计算机解决这类问题的成败得失，使查德逐步意识到传统数学方法的局限性. 他指出："在人类知识领域里，非模糊概念起主要作用的唯一部门只是古典数学"，"如果深入研究人类的认识过程，我们将发现人类能运用模糊概念是一个巨大的财富而不是包袱. 这一点，是理解人类智能和机器智能之间深奥区别的关键."精确的概念可以用通常的集合来描述. 模糊概念应该用相应的模糊集合来描述. 查德抓住这一点，首先在模糊集的定量描述上取得突破. 可以把查德的工作和他的前辈的工作做一些联想：

十七世纪，牛顿和莱布尼兹发明微积分，应用这一新方法成功地解决了一系列重要问题. 上至天文地理，下至日常生活，数学的影子无处不在，使人们不禁惊叹：大自然是用数学说话. 有神论者说造物主是数学家.

然而，到本世纪五十年代，著名数学家被誉为电子计算机之父的冯·诺依曼(Von Neumann)深入地研究了电子计算机和人脑功能的异同，在他最后一本遗作里断言："人脑的语言不是数学的语言"！

十年后，即1965年，查德首次明确而系统地提出模糊集的概念，实际上是企图指出：人脑的语言可能是模糊语言.

当然，这个答案还远未完成. 但是，经过二十年的努力，已经可以看出，这方面研究取得的宝贵进展，不仅丰富

了经典的数学理论，而且对开拓电子计算机新的应用领域以至新型计算机的研制都有重要的推动作用.

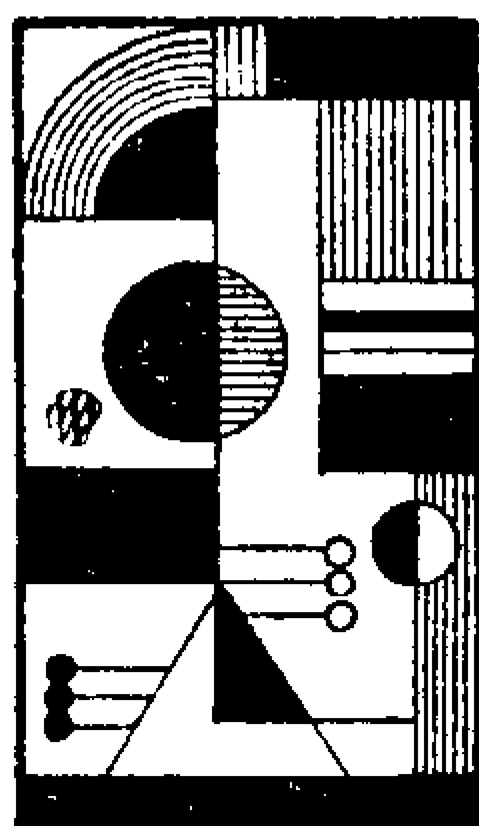
电子计算机问世才四十多年，其影响所及遍布世界各个角落. 科学家预言，到本世纪末，它将渗透人类生活的一切重要领域. 以电子计算机及其相关技术的广泛应用为主要特征的新技术革命，不仅导致国民经济的发展和物质生产水平的提高，而且将影响整个社会的变化，迎来信息社会的明天. 但是，到目前为止，最先进的计算机也还存在一个根本缺陷，即不具备人脑所特有的模糊推理、模糊决策的能力，不能像人那样处理用自然语言表达的知识，不能像人那样做近似推理，也不能用自然语言与人对话. 这些计算机能准确地控制飞船登月，却无法识别人的音容笑貌. 在某种意义上说，其"智能"水平不及一个婴儿. 事实上，把目前全世界所有的超大型计算机动员起来，也解决不了诸如婴儿识别母亲这样一些看起来十分简单的问题. 解决这些问题，要求计算机具备处理模糊信息的能力，从而要求人们对模糊概念、模糊推理进行深入的研究. 这些问题的解决必将使计算机的发展出现根本性的突破，导致新一代计算机即智能计算机的诞生.

谁能在新一代计算机的研究中领先，谁就站在新技术革命的最前列，谁就将在世界经济科学、文化、国防等各方面居于领先地位.

如果同意这个观点，你就会对这门被称为"模糊数学"的学科发生兴趣，对它的重要性有了认识.

末了，我们对模糊数学这个学科的名称说几句话．这个名称也许容易使人产生误会：怎么把数学这门学科搞成模模糊糊的？模糊数学当然不是模模糊糊的学科，它是以数学手段分析与处理模糊性事物的学科，所以当初如果把这个外来词(Fuzzy Mathematics)译成“模糊性数学”或许更贴切些。

目　录



一　集合和逻辑

这一章带有复习性质．有些读者可能感到前两节讨论的内容和中学教材重复.不过,适当的重复有时也是必要的.

1　集　　合

进入高中，我们在代数课里就接触到了集合的概念．直观地理解集合的概念并不困难．例如，我们学校的全体师生员工组成一个集合．某个图书馆拥有的全部书刊组成一个集合，全体正整数组成一个集合，此时此刻全世界满十八周岁的人组成一个集合，方程 $x^2-4x+3=0$ 的根组成一个集合，等等．一般地说，我们把具有某种性质的事物的总体叫做集合，通常用大写拉丁字母 A, B, C, … 表示；构成集合的事物叫做元素，通常用小写字母 a, b, c, … 表示．

这里，需要注意的是，我们所谈到的任何一个集合，它所包含的元素都是确定的．换句话说，对任何一个元素，它或者属于这个给定的集合，或者不属于，二者只能择一，是

完全确定的.

如果 a 是某个集合 A 的一个元素，则称元素 a 属于集合 A，以

$$a \in A$$

表示，读作"a 属于 A". 如果 b 不是集合 A 的元素，则称元素 b 不属于集合 A，以

$$b \overline{\in} A \quad \text{或} \quad b \notin A$$

表示，读作"b 不属于 A".

确定一个集合最直接的办法是把集合的全体成员列举出来. 例如，以 A 表示某校高二(2)班学生的集合，则这班的学生名册就确定了集合 A. 我们知道，每位任课教师都有这么一个名册. 在册的都是高二(2)班的学生，不在册的就不是. 这种确定集合的办法叫列举法. 用列举法确定集合时，往往就把集合的元素全写在大括号内，于是

$$\{1, 3, 4\}$$

表示 1, 3, 4 这三个数组成的集合. 同样

{张三, 李四}

表示由张三，李四这两人组成的集合.

列举法的好处是可以具体看清集合的元素，比较直观. 但是，当集合中元素的数目很大时，就显得累赘. 如果元素的数目是无限多，它就更不适用. 因此，有时我们还需要用描述法，即用描述集合元素所特有的公共属性来确定这个集合：具有这属性的元素属于这个集合，否则就不属于. 用描述法表示集合时，可以在大括号内先写上这个集

合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线右边写上这个集合元素的公共属性. 如

$$\{x|x^2-4x+3=0\}$$

表示“方程 $x^2-4x+3=0$ 的根”组成的集合，

$$\{x||x-2|<3,\ x\in R\}$$

表示“与 2 的差的绝对值小于 3 的全体实数”组成的集合，其中 R 表示实数集. 有时，为简单起见，也可省去竖线及其左边部分，于是

$$\{直角三角形\}$$

就表示直角三角形的集合.

列举法和描述法各有特点. 在实际研究中，采用哪一种表示方法，要根据具体问题来确定. 例如，暂时只知道元素的性质的集合，只好用描述法表示. 如用 B 表示方程 $x^2-4x+3=0$ 的根的集合

$$B=\{x|x^2-4x+3=0\}.$$

在没有求出这个方程的根以前，只好这样表示. 但是，求出这个方程的根以后，B 当然可以更直观地用列举法表示，即

$$B=\{1,\ 3\}.$$

在小学算术和中学代数里，我们通过对“数”之间的大小关系及其运算的讨论来研究数的性质. 现在，同样需要通过对“集合”之间的关系和运算的讨论来研究集合的性质.

定义 1 设 A 和 B 是两个集合，如果 A 中的任何一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作

$$A\subseteq B \quad 或 \quad B\supseteq A.$$

读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

如果 A 不是 B 的子集，即 A 中至少有一个元素不属于 B，则可记作

$$A \nsubseteq B \quad \text{或} \quad B \nsupseteq A.$$

读作“A 不包含于 B”或“B 不包含 A”.

定义 2 设 A 和 B 是两个集合，如果 A 中的任何一个元素都是 B 的元素，同时 B 中的任何一个元素也是 A 的元素，则称 A 和 B **相等**，记作

$$A=B.$$

如果 A 中至少有一个元素不在 B 中，或者 B 中至少有一个元素不在 A 中，则称 A 和 B 不相等，记作

$$A \neq B.$$

两个集合相等，意味着这两个集合包含着相同的元素. 根据定义，要证明两个集合 A 和 B 是相等的，必须证明

(1) A 中任何一个元素都是 B 的元素；

(2) B 中任何一个元素都是 A 的元素.

初听起来，这好象是不必要的绕圈子. 但是，这种“绕圈子”确实是验证两个集合相等的唯一办法.

定义 3 不包含任何元素的集合叫作**空集**，以 $\varnothing$ 表示.

定理 1 设 A 是任意一个集合，则有 $\varnothing \subseteq A$，即空集是任意集合的子集.

证明 用反证法. 若 $\varnothing \nsubseteq A$，由定义，$\varnothing$ 中至少有一个元素不属于 A，但 $\varnothing$ 不包含任何元素，这是矛盾的，所以有 $\varnothing \subseteq A$.

也许你会认为空集既然是“空”的，什么都不包含，因此就无足轻重这就错了．事实上，空集不仅重要（请回忆算术中数零的作用！），有时还很招人喜欢．例如，我们刚参加一场考试，用 A 表示在这场考试中成绩不合格的人的集合．如果 $A=\varnothing$，于是大家一定都非常高兴．

定义 4 设 A、B 是两个集合．由所有属于 A 且属于 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的**交集**，简称 A、B 的**交**，以 $A\cap B$ 表示，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

定义 5 设 A、B 是两个集合．由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的**并集**，简称 A、B 的**并**，以 $A\cup B$ 表示，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

为了讨论补运算，需要引进全集的概念．

一般说来，当我们进行实际研究时，总是围绕着某个确定的主题，与之无关的事物我们就不涉及．例如，平面几何研究的就是平面上点的集合．通常把所要研究的事物的全体叫做**全集**，也叫**论域**．我们只在论域的范围内讨论问题．论域通常用大写拉丁字母 I、U、V 等表示．

定义 6 设 U 为论域．对任意集合 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 A 在论域 U 中的**补集**，或简称 A 的**补**，记作 $\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x\mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

可以证明，对任意集合 $A, B, C\subseteq U$，有

S1) 等幂律

$$A\cup A=A$$

$$A\cap A=A$$

S2) 交换律

$$A\cup B=B\cup A$$

$$A\cap B=B\cap A$$

S3) 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

S4) 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

S5) 德·摩根律

$$(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$$

$$(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}$$

S6) 双重否定律

$$\overline{\overline{A}}=A$$

S7) 两极律

$$U\cup A=U$$

$$\varnothing\cup A=A$$

$$U\cap A=A$$

$$\varnothing\cap A=\varnothing$$

S8) 补余律

$$A\cup\overline{A}=U$$

$$A\cap\overline{A}=\varnothing$$

严格证明这些性质，要用前面介绍的"绕圈子"的办法．不过，我们宁可利用一些具体例子来说明，这将更直观而易于接受．

[例 1]　论域 $U=\{a, b, c\}$，则 U 的全部子集是

$$U=\{a, b, c\}$$
$$A=\{a, b\}$$
$$B=\{b, c\}$$
$$C=\{a, c\}$$
$$D=\{a\}$$
$$E=\{b\}$$
$$F=\{c\}$$
$$\varnothing$$

容易看出

$$A\cap B=\{b\}=E$$
$$A\cap C=\{a\}=D$$
$$(A\cap B)\cup(A\cap C)=E\cup D=\{a, b\}=A$$

另一方面

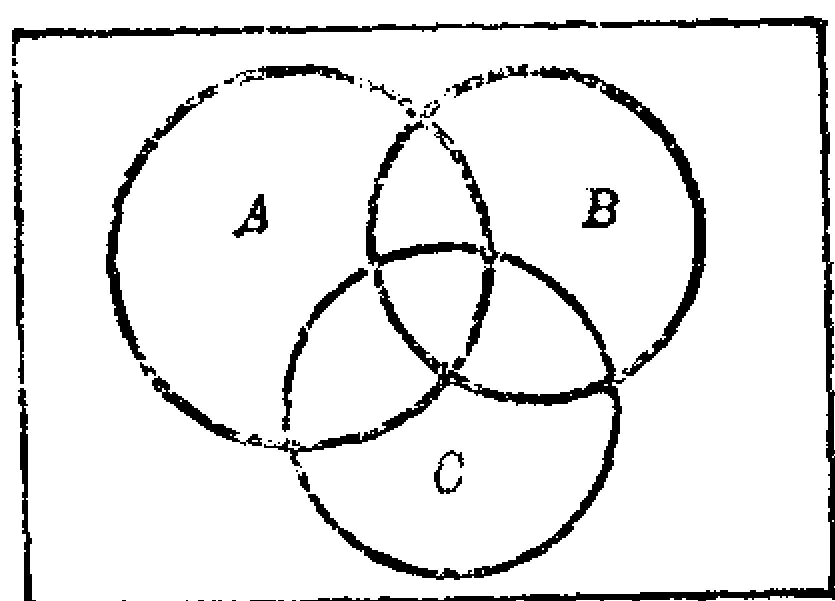
$$B\cup C=\{a, b, c\}=U$$
$$A\cap(B\cup C)=A\cap U=A$$

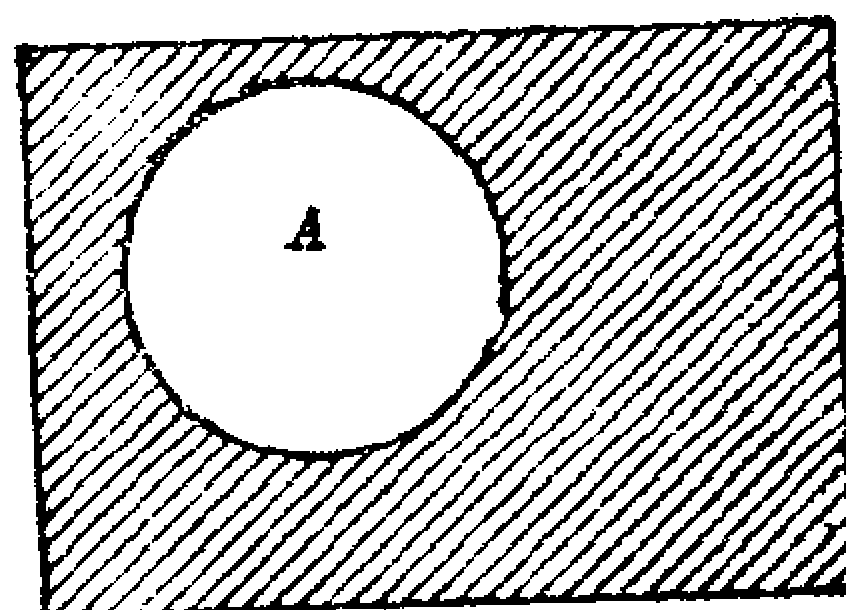
即

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

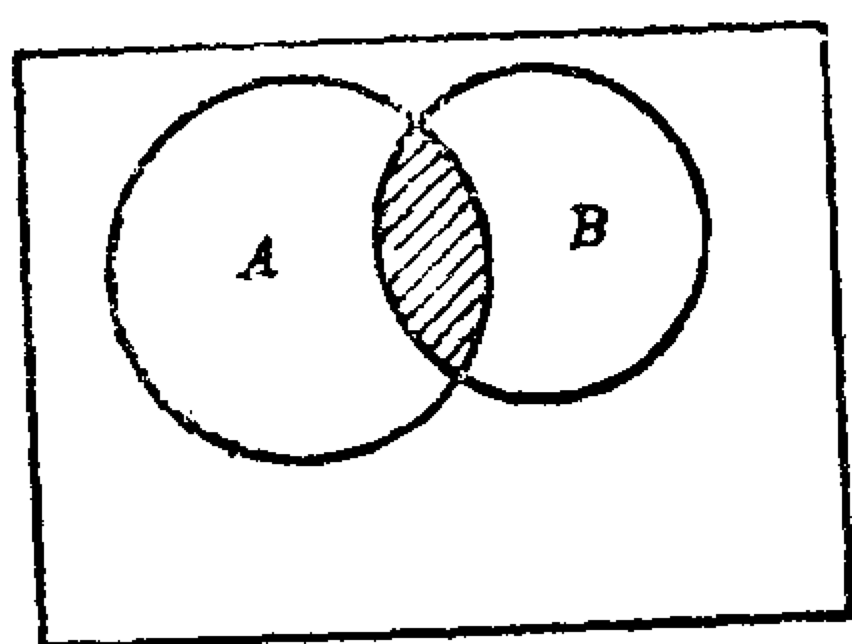
这就是 S4)．其他性质都可类似地进行验证

[例 2]　用矩形表示论域 U．A, B, C 三个集合分别用矩形内的三个圆表示，这就是所谓的韦恩(Venn)图(图 1)．

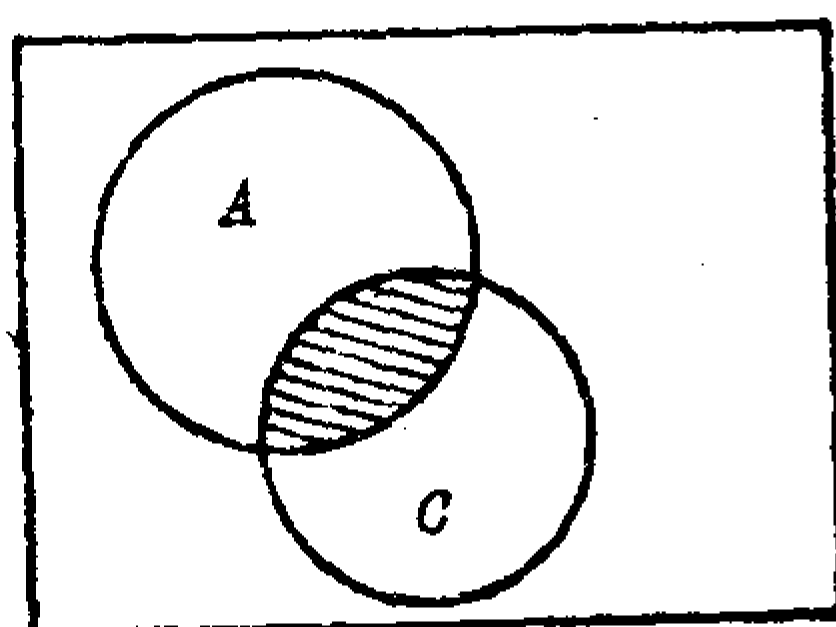




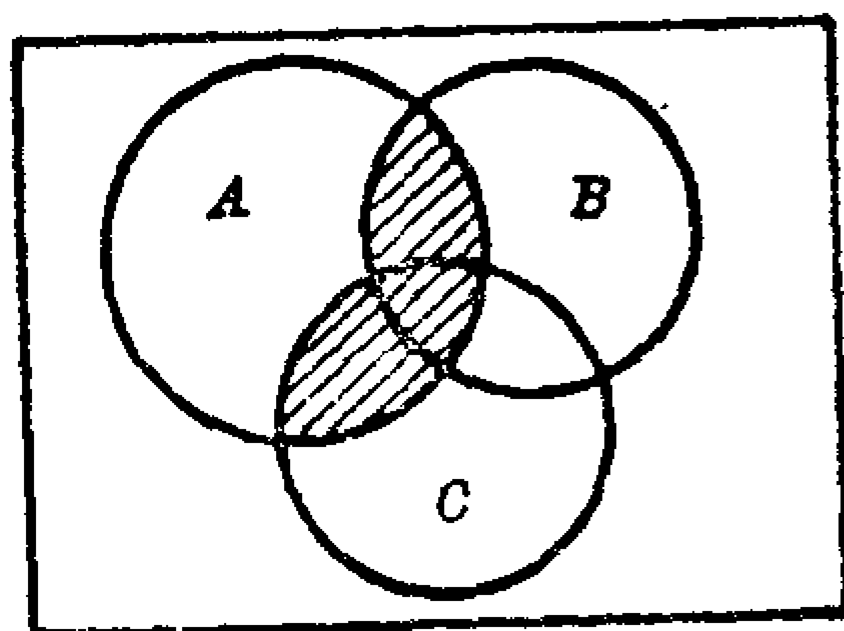
阴影部分为 $\bar{A}$



阴影部分为 $A\cap B$



阴影部分为 $A\cap C$



阴影部分表示为如下关系:

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

图 1

2 映射、直积和关系

在中学代数里，介绍了所谓"映射"的概念.

定义7 设 A, B 是两个集合. 如果按照某种对应法

则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应(这涉及集合 A，B 及从 A 到 B 的对应法则 f)叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作

$$f: A\to B$$

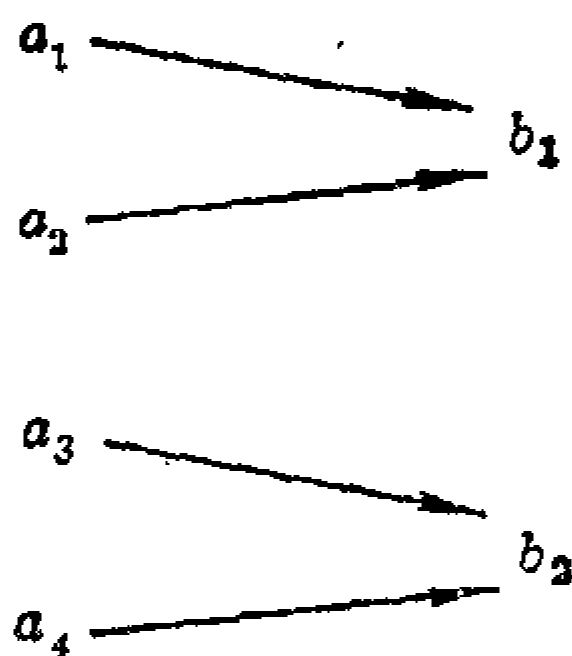
这时，和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的一个原象.

当集合 A，B 都是非空的数的集合，且 B 的每一个元素都有原象时，称映射 $f: A\to B$ 为从定义域 A 到值域 B 上的函数.

[例 3]　若 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，$B=\{b_1, b_2\}$，则

$$f(a_1)=f(a_2)=b_1,\ f(a_3)=f(a_4)=b_2.$$

给出了 A 到 B 的一个映射，用图来表示就更直观一些.



上述映射也可用另外一种形式描述. 我们把等式 $f(a_1)=b_1$ 记为 (a_1, b_1)，A 中的元素 a_1 放在前面，它的象 b_1 是 B 的元素，放在后面，顺序是严格规定的. 因此把 (a_1, b_1) 叫做有序对. 映射 f 实际上是由四个有序对

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_1),\ (a_3, b_2),\ (a_4, b_2)$$

确定的，同样，如果给出有序对

$$(a_1, b_2),\ (a_2, b_2),\ (a_3, b_2),\ (a_4, b_1)$$

也确定了 A 到 B 的一个映射

$$g(a_1)=g(a_2)=g(a_3)=b_2,\ g(a_4)=b_1.$$

定义 8 若 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$, $B=\{b_1,\ b_2\}$, 则全体有序对的集合

$$\{(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_1),\ (a_3,\ b_1),\ (a_4,\ b_1),\ (a_1,\ b_2),\ (a_2,\ b_2),\ (a_3,\ b_2),\ (a_4,\ b_2)\}$$

称为 A、B 的直积, 记作 $A\times B$.

一般地, 对任意两个集合 A, B, 称

$$\{(a,\ b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}$$

为 A, B 的直积, 记作 $A\times B$.

[例 4] 设 $A=B=\{1, 2, 3\}$, 则 $A\times B$ 可写成 $A\times A$, 它由下列 9 个元素组成

$$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$$
$$(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)$$
$$(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3)$$

用平面上的格子点表示, 就显得更为直观(图 2).

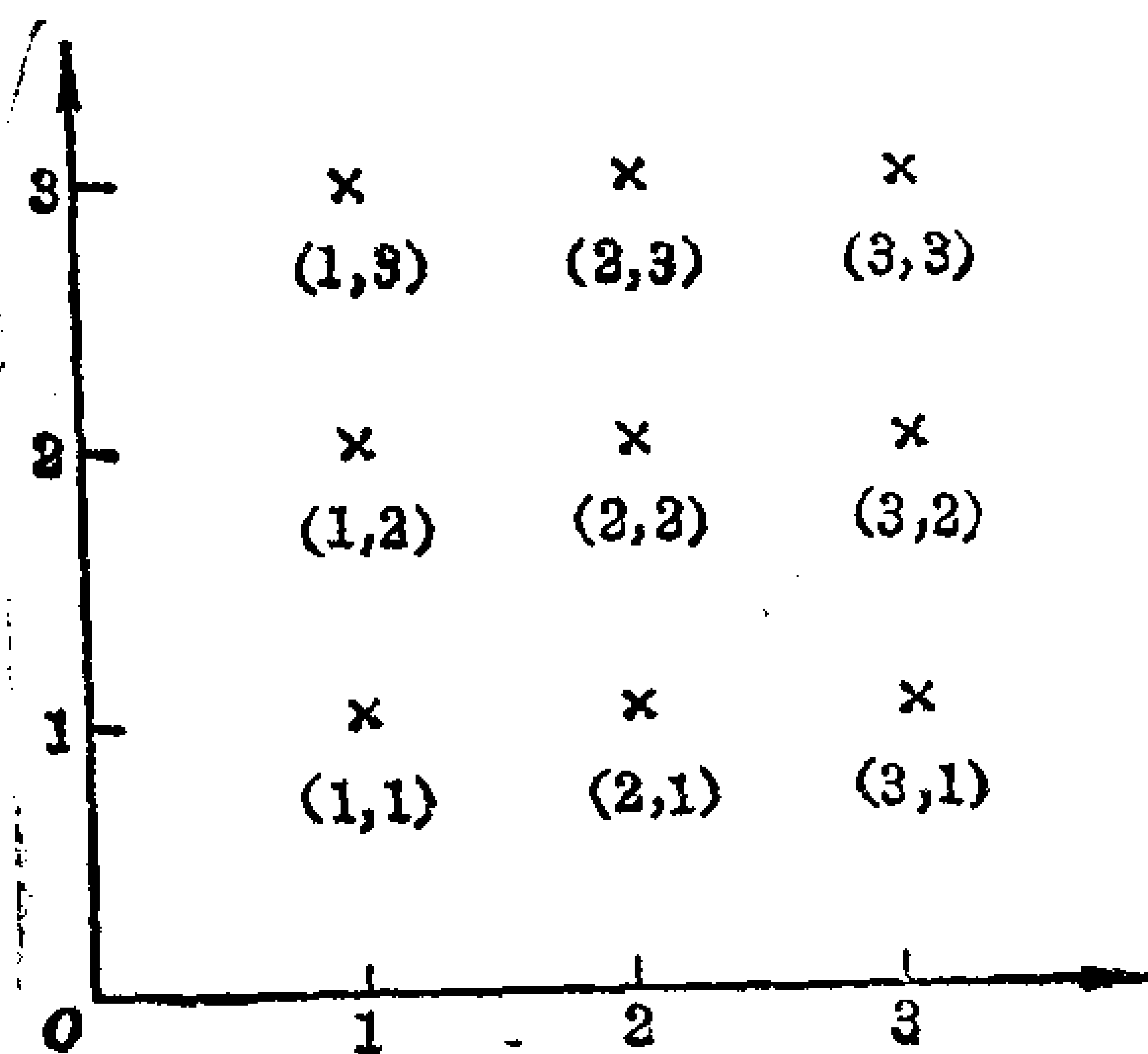


图 2

[例 5] 在平面上建立坐标系, 平面上的点的横坐标和纵坐标就构成一个有序对. 所以, 平面可以看成横轴和纵轴的直积. 直积也叫笛

卡儿积. 这是为了纪念法国著名的数学家笛卡儿而命名的. 他首先把实数的有序对和平面上的点联系起来, 从而揭示了代数学和几何学的密切关系.

现在, 让我们回到例 3, 这时

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$B=\{b_1, b_2\}$$

$$A\times B=\{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_4, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_2), (a_4, b_2)\}$$

而 A 到 B 的映射 f 由

$$\{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_2)\}$$

确定. 因此, 可以把 f 看成 $A\times B$ 的一个子集. 当然, 这并不是说 $A\times B$ 的任一子集都是 A 到 B 的映射. 例如

$$\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$$

是 $A\times B$ 的子集. 但是, 根据以上给出的两个有序对, 我们有 $a_1\to b_1$, $a_2\to b_2$. 然而, a_3、a_4 的象是什么, 没有确定. 因此, 不符合映射的定义. 同样

$$\{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\}$$

也不是 A 到 B 的映射, 因为对 A 中的元素 a_1 竟然有 B 中两个元素 b_1、b_2 和它对应, 也不符合映射的定义. 但是, 如果我们把映射的概念稍为推广一下, 可有

定义 9 A、B 的直积 $A\times B$ 的一个子集 R 称为 A 与 B 之间的一个二元关系. 对 $a\in A$, $b\in B$, 若 $(a, b)\in R$, 则称 a 与 b 符合关系 R, 记作 aRb; 否则, 就称 a 与 b 不符合关系.

如果 R 是 A 与 B 之间的一个二元关系，且对 A 中的每个元素都有 B 的唯一一个元素和它对应，则 R 就是 A 到 B 的一个映射.

[例 6]　接例 4.

$$A=B=\{1, 2, 3\}$$

$$A\times B=\{(a, b)\,|\,a=1, 2, 3, b=1, 2, 3\}$$

若定义 aRb 为 a 大于 b，即 R 为"大于"关系，这个关系由 $A\times B$ 的子集

$$\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

给出. 也可写成更简洁的形式

$$R=\{(a, b)\,|\,a>b\}$$

A 与 A 自身的关系简称为 A 上的关系.

[例 7]　集合 A 由 5 人组成，这 5 人分别用编号代表，即

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

若 1 是 2 的哥哥，2 和 3 没有亲属关系，3 是 4 的哥哥，4 是 5 的哥哥，定义 aRb 为 a 是 b 的哥哥，则应如何描述 R?

由题意，符合关系的有 1 与 2, 3 与 4, 4 与 5，则有

$$R=\{(1, 2), (3, 4), (4, 5)\}.$$

但仔细一想，上式有遗漏. 因为"哥哥"这种关系有"传递性"，即若 3 是 4 的哥哥，4 是 5 的哥哥，则 3 必是 5 的哥哥. 所以，正确的表达应为

$$R=\{(1, 2), (3, 4), (4, 5), (3, 5)\}.$$

3 学一点逻辑

集合和逻辑有着密切关系．在某种意义上说，模糊集合的提出，直接目的是为了弥补经典逻辑的缺陷．因此，为了更深入地了解集合的概念，我们需要一些数理逻辑的基本知识．

数理逻辑是一门相当深奥的学科，以致我国的许多高等学校数学系本科学生都还没有专门学过这门课程．不过，它的初等内容又似乎是每个有中等文化水平的人所熟悉的．这个特点带来了某种方便，使我们有可能用一种虽然不太严格但却较易被人接受的方式向读者介绍数理逻辑的某些基本知识．

先介绍所谓命题的概念．

通常把可以明确判断真、假的语句称为命题，例如

(1) 3是奇数；　　(2) 狗是植物；

(3) 明天天晴；　　(4) 人都是要死的；

(5) 对不起；　　(6) 再见．

(1)～(4)都是命题．若命题正确，则称命题的值为真；若命题不正确，称命题的值为假．显然，命题(1)、(4)的值为真，命题(2)的值为假．命题(3)的值尽管现在不知道，但明天就可以知道．另一方面，我们无法判断语句(5)、(6)的真假，所以它们都不是命题．

由一些命题，可以通过适当的联结推出新的命题．

定义 10 对任一命题 P，命题"非 P"称为 P 的否定，记作 $\neg P$. 当且仅当 P 假时，$\neg P$ 为真．

定义 11 对两个命题 P、Q，命题"P且 Q"称为P、Q 的合取，记作 $P\wedge Q$. 当且仅当 P、Q 二者都真时，$P\wedge Q$ 为真.

定义 12 对两个命题 P、Q，命题"P 或 Q"称为 P、Q 的析取，记作 $P\vee Q$. 当且仅当 P、Q 至少有一为真时，$P\vee Q$ 为真.

[例 8] 以 P 表示"张三参军"，Q 表示"李四考上大学"，则 $\neg P$ 为"张三没有参军"，$\neg Q$ 为"李四没有考上大学"，$P\wedge Q$ 为"张三参军且李四考上大学"，$P\vee Q$为"张三参军或李四考上大学". 命题"张三没有参军且李四考上大学"可写成 $\neg P\wedge Q$.

在数理逻辑中研究命题，并不关心命题叙述的具体内容，而只注意它们的真假值和它们之间的逻辑关系. 这样，我们就可以对命题逻辑作形式化的研究.

例如，根据定义，不论命题 P 代表的是什么内容，当且仅当 P 假时，$\neg P$ 为真. 换句话说，若 P 真，$\neg P$ 为假；若 P 假，$\neg P$ 为真. 为简便起见，以 1 表示真，0 表示假，则以上所述可写成表的形式

P	$\neg P$
1	0
0	1

这个表叫真值表.

类似地,$P\wedge Q$ 的真值表为

P	Q	$P\wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$P\vee Q$ 的真值表为

P	Q	$P\vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

命题的真值表完全刻划了它的逻辑含义. 因此, 两个命题 P 与 Q 的真值表如果完全相同,我们就把它们看成相等的, 记作 $P=Q$.

定义 13 在真值表中,若一个命题的值都是 1, 则称为恒真命题, 也叫重言式; 若一个命题的值都是 0, 则称为恒假命题, 也叫矛盾式.

在不致引起混淆的情况下,我们常用 1 表示恒真命题, 用 0 表示恒假命题.

[例 9] 试计算 $P\vee\neg P$ 的真值表.

解

P	$\neg P$	$P\vee\neg P$
1	0	1
0	1	1

在任何情况下，命题 $P\vee\neg P$ 都是真的，即 $P\vee\neg P$ 是重言式，可写成

$$P\vee\neg P=1.$$

[例 10] 试计算 $P\wedge\neg P$ 的真值表.

解

P	$\neg P$	$P\wedge\neg P$
1	0	0
0	1	0

在任何情况下，命题 $P\wedge\neg P$ 都是假的，即 $P\wedge\neg P$ 是矛盾式，可写成

$$P\wedge\neg P=0.$$

从上述几个例子可以看出，用真值表来研究命题之间的关系，一般说来是很麻烦的. 因此，我们宁可采用其它的办法，即先用真值表的方法得到少数几个基本等式，然后以这些基本等式为基础推导出所需要用到的其他等式.

这些基本等式主要是

L1) 等幂律

$P\vee P=P$

$P\wedge P=P$

L2) 交换律

$$P\vee Q=Q\vee P$$

$$P\wedge Q=Q\wedge P$$

L3) 结合律

$$(P\vee Q)\vee R=P\vee(Q\vee R)$$

$$(P\wedge Q)\wedge R=P\wedge(Q\wedge R)$$

L4) 分配律

$$P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$$

$$P\vee(Q\wedge R)=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$$

L5) 德·摩根律

$$\neg(P\vee Q)=\neg P\wedge\neg Q$$

$$\neg(P\wedge Q)=\neg P\vee\neg Q$$

L6) 双重否定律

$$\neg\neg P=P$$

L7) 0-1 律

$$1\vee P=1$$

$$0\vee P=P$$

$$1\wedge P=P$$

$$0\wedge P=0$$

L8) 补余律

$$P\vee\neg P=1$$

$$P\wedge\neg P=0$$

为证明上述性质，只需把等式两端的真值表算出加以比较.例如,我们证明德·摩根律的第一个式子.

$\neg(P\vee Q)$的真值表

P	Q	$P\vee Q$	$\neg(P\vee Q)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

P	Q	$\neg(P\vee Q)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\neg P\wedge\neg Q$ 的真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

P	Q	$\neg P\wedge\neg Q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

即 $\neg(P\vee Q)$ 与 $\neg P\wedge\neg Q$ 的真值表是相同的. 因此 $\neg(P\vee Q)=\neg P\wedge\neg Q$.

细心的读者会发现, 这里列举的性质和集合运算的性质是相同的. 只要把集合的交、并、补运算分别换成命题的合取、析取、否定, 把集合 A、B、C、U、$\varnothing$ 分别换成命题 P、Q、R、1、0 就完全一样了. 所以,集合和逻辑从形式上说是具有同样的结构. 我们可以把问题讨论得更深入一些.

在集合论中, 给定论域 U 的子集 A, 对 U 中的某一元素 a, 它或属于 A, 或不属于 A. 因此, "a 属于 A"就是所谓的命题. 可以把这个命题看成由两部分组成: "a"叫做主语, 也叫个体, "属于 A"叫谓语或谓词. 显然, 只是个体或只是谓词都不能表达一个完整的意思, 但把个体和谓词结合起

来，就能得到可以明确判断真、假的语句即命题. 通常用大写字母表示谓词，小写字母表示个体. 例如，用 P 表示"属于 A"，当把个体和谓词结合起来构成命题时，就用括号将个体括住并写在谓词的符号后面，如"a 属于 A" 就可写成 $P(a)$.

现在，假定在命题中出现的个体是变量，即可取为论域中的任意元素，我们用符号 x 表示. 于是，"x 属于 A"可写成 $P(x)$，当然，这时命题 $P(x)$的值或为 0 或为 1，随着 x 的取定而取定. 换句话说，$P(x)$的值是 x 的函数，通常称为命题 P 的**真值函数**. 以 A 表示使 $P(x)$为真的所有 x 组成的集合，即

$$A=\{x \mid P(x)=1\},$$

或简写为 $$A=\{x \mid P(x)\}.$$

则 x 属于 A，$P(x)$为真，取值 1; x 不属于 A，$P(x)$为假，取值 0. 这样，在集合和逻辑之间可以建立起有趣的对应关系

集合	逻辑
A	$P(x)$
$a \in A$	$P(a)=1$
$a \notin A$	$P(a)=0$

有时把 P 或者 $P(x)$称为集合 A 的**特性谓词**. 所以，用描述法确定集合，实际上就是用特性谓词来确定集合.

进一步，对集合 A、B，设它们的特性谓词分别是 $P(x)$、$Q(x)$，即

$$A=\{x|P(x)\}$$
$$B=\{x|Q(x)\}$$
则有
$$\overline{A}=\{x|\neg P(x)\}$$
$$A\cap B=\{x|P(x)\wedge Q(x)\}$$
$$A\cup B=\{x|P(x)\vee Q(x)\}$$
事实上，$\overline{A}$ 就是由 $P(x)=0$ 从而 $\neg P(x)=1$ 的所有 x 组成．同样，$A\cap B$ 是由同时属于 A、B 从而 $P(x)=1$ 且 $Q(x)=1$ 即 $P(x)\wedge Q(x)=1$ 的所有 x 组成；$A\cup B$ 是由属于 A 或属于 B 从而 $P(x)=1$ 或 $Q(x)=1$ 即 $P(x)\vee Q(x)=1$ 的所有 x 组成．这样，我们还可以进一步完善集合和逻辑的上述对应关系

集合	逻辑
A	$P(x)$
B	$Q(x)$
$\overline{A}$	$\neg P(x)$
$A\cap B$	$P(x)\wedge Q(x)$
$A\cup B$	$P(x)\vee Q(x)$
论域 U	恒真命题 1
空集 $\varnothing$	恒假命题 0

那么，集合的包含关系在逻辑中意味着什么？不难看出，$A\subseteq B$ 就意味着若 $x\in A$ 则 $x\in B$，即"若 P 则 Q"．这种命题叫假言命题，也称为蕴含式，以"$P\to Q$"表示．通常把 P 叫作条件，Q 叫作结论，假言命题 $P\to Q$ 的真值表规定为

P	Q	$P\to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

但 $\neg P\vee Q$ 的真值表是

P	Q	$\neg P$	$\neg P\vee Q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

P	Q	$\neg P\vee Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

和 $P\to Q$ 的真值表完全相同. 所以我们有

$$P\to Q=\neg P\vee Q$$

一般地说，蕴含式 $P\to Q$ 的值依赖于个体 x. 如果蕴含式 $P\to Q$ 恒为真, 则称为蕴含重言式, 记为 $P\Rightarrow Q$. 所以, 对应于集合论的包含关系 $A\subseteq B$, 在逻辑中就是所谓的蕴含重言式 $P(x)\Rightarrow Q(x)$.

它反映了人类思维最基本的一种推理模式. 在人类思维活动中, 经常需要进行大量的逻辑推理, 这些推理通常是由一些已知的条件出发, 推得一些未知的结论. 蕴含重言式 $P(x)\Rightarrow Q(x)$ 就描述了型如"若 $P(x)$ 真, 则 $Q(x)$ 真"的推理模式. 根据这个模式可以派生出许多重要的推理规则. 例如, 形式逻辑中有名的"假言三段论"就是一种蕴含重言式

$$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow P\to R$$

用话来叙述是：若由 P 能推出 Q，由 Q 能推出 R，则由 P 必能推出 R. 假言三段论也叫传递规则. 我们在日常生活中经常用到这个规则.

[例 11] 设

P：天阴

Q：将下雨

R：出门要带伞

如果下列前提是真的

$P\to Q$：若天阴则将下雨

$Q\to R$：若将下雨则出门要带伞

那么，应用传递规则立即可得出结论

$P\to R$：若天阴则出门要带伞

关于逻辑，先简单讨论到这里. 以后，在需要的时候，我们还将提及.

4 集合的特征函数

我们曾经强调，在集合论中考察集合的着眼点是论域中的元素对该集合的从属关系，而对元素本身的具体性质并不关心. 因此，只要对论域的每个元素，都能判断哪个属于该集合哪个不属于，集合就被认为是确定了. 我们不妨用数“1”表示“属于”，用数“0”表示“不属于”，则确定一个集合 A，就相当于给出论域 U 到 $\{0, 1\}$ 的一个映射

$$f_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

映射 f_A 称为集合 A 的特征函数. 可以看出，集合 A 的特征函数 f_A，就是命题"$x\in A$"的真值函数. 同样，若给出 U 到 $\{0, 1\}$ 的任一映射

$$f: U\to\{0, 1\}$$

则按下式

$$A=\{x|f(x)=1, x\in U\}$$

即可确定相应的集合. 事实上"$f(x)=1$"就是 A 的特性谓词. 于是，正如在数理逻辑中可以用真值函数来刻划命题，现在我们同样可以用特征函数来描述集合. 特别是，论域的特征函数恒取值 1，空集 $\varnothing$ 的特征函数恒取值 0，在不致引起混淆的情况下，我们类似地就用 1、0 分别表示论域和空集的特征函数.

例如，论域 $U=\{a, b, c\}$，则 U 的全部子集的特征函数的函数值由下表给出

	a	b	c
$U=\{a, b, c\}$	1	1	1
$A=\{a, b\}$	1	1	0
$B=\{b, c\}$	0	1	1
$C=\{a, c\}$	1	0	1
$D=\{a\}$	1	0	0
$E=\{b\}$	0	1	0
$F=\{c\}$	0	0	1
$\varnothing$	0	0	0

又如，论域 U 为实数集，则

$$A=\{x \mid |x|\leqslant 1\}$$

的特征函数是

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leqslant 1);\\ 0 & (|x|>1).\end{cases}$$

这个函数的图形如图 3 所示.

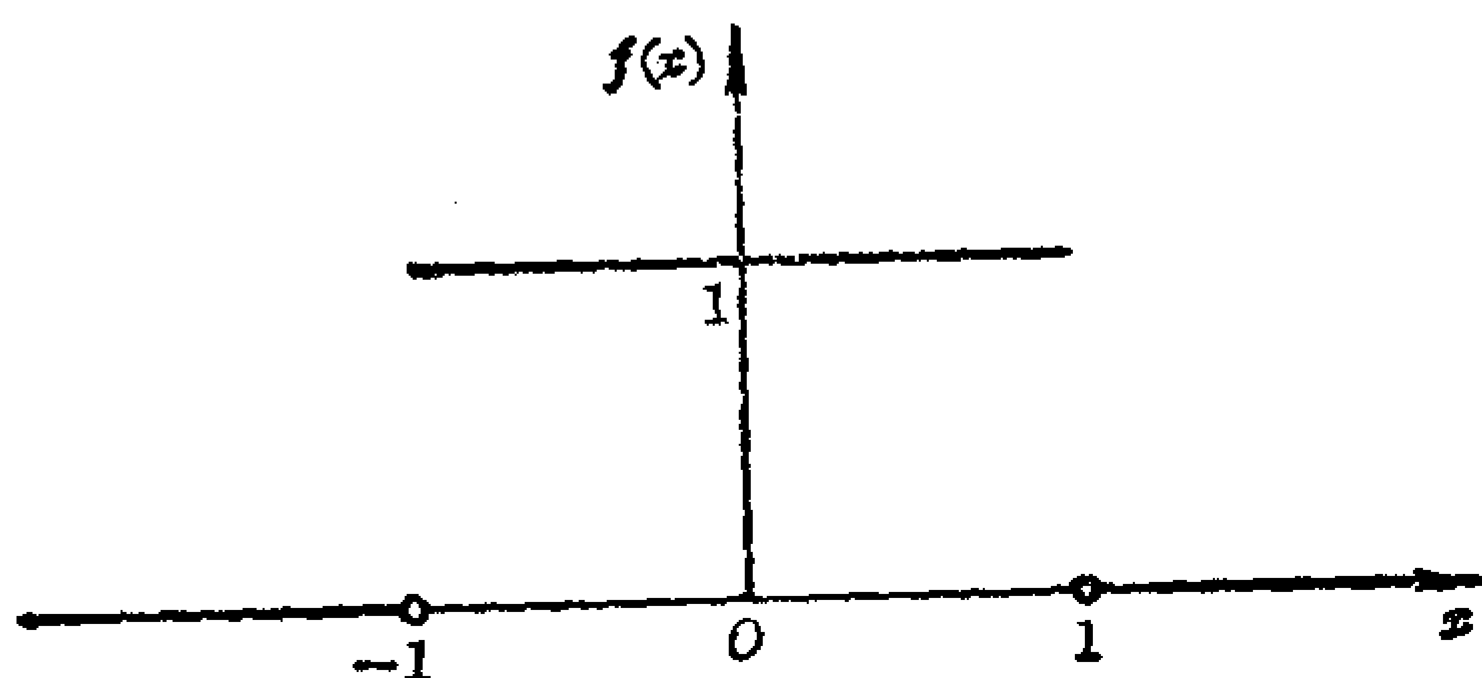


图 3

又如，论域仍为实数集. 实数集到 $\{0, 1\}$ 的映射

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\in Q),\\ 0 & (x\notin Q)\end{cases}$$

（Q 为有理数集）

为有理数集的特征函数. 这个函数的图形我们画不出来.

为方便起见，现在引入实数间"取大"、"取小"的运算符号"$\vee$"、"$\wedge$"以代替通常使用的 max、min，即对任意实数 a, b，定义

$a\vee b=\max(a, b)$ 也就是两数中较大的一个；

$a\wedge b=\min(a, b)$ 也就是两数中较小的一个.

于是，若分别以 f_A, f_B, $f_{\overline{A}}$, $f_{A\cup B}$, $f_{A\cap B}$ 表示集合 A, B, $\overline{A}$, $A\cup B$, $A\cap B$ 的特征函数，则有

C1) $A \subseteq B$ 当且仅当 $f_A \leqslant f_B$

C2) $f_{\bar{A}} = 1 - f_A$

C3) $f_{A \cup B} = f_A \vee f_B$

C4) $f_{A \cap B} = f_A \wedge f_B$

这些性质的验证是不困难的．例如，证明 C1)的必要性部分：

若 $x \in A$，因 $A \subseteq B$，则 $x \in B$，从而 $f_A(x) = f_B(x) = 1$；若 $x \notin A$，则 $f_A(x) = 0$．由此，对任意的 $x \in U$，都有 $f_A(x) \leqslant f_B(x)$．其余的留给读者证明作为练习．

这里的 1)～4)说明，应用特征函数同样可以方便地讨论集合间的包含关系和运算．当然，和我们所熟悉的列举法、描述法相比，用这种方法研究集合可能显得有些抽象而不那么直观．但是，有所失往往会有所得．失掉了一些直观性，却使我们获得方便推广的某种可能性．事实上，当试图对通常讨论的集合概念进行一些推广的时候，特征函数的方法显得特别方便．

直到目前为止，我们所讨论的特征函数的取值的范围即值域只由两个数 0 和 1 组成．它可以解释为论域的元素 x 对集合的“属于程度”，属于该集合的，“属于程度”为1；不属于该集合的，“属于程度”为0．于是，集合的特征函数的值就表示元素对该集合的“属于程度”．对本章开始时讨论的集合，也就是我们在经典数学中讨论的集合来说，元素与集合之间的关系只有两种状况：属于、不属于．但是，正如前言已经指出，在许多场合里，“是”与“不是”、“属于”与“不

属于”之间的区别不是突变的，不是一刀切的，而是有一个边缘地带、过渡过程．当时我们提出了这个问题，但是不知道应该怎么解决它．现在，以特征函数为工具，沿着“属于程度”，这条路线继续思考，很自然地会提出疑问：为什么要把自己局限于只考虑“属于”、“不属于”两种极端情况？换句话说，为什么非要规定特征函数只取 0、1 两个值，取 0、1 之间的其他值又有什么不可以？例如，取 0.7，表示“属于程度”是0.7；取 0.01，表示“属于程度”是 0.01．请注意，现在，你已经踏在一个重大发现的门坎上！

二　模糊集的基本概念

我们在本节所做的工作只是把值域{0, 1}改成 [0,1]，也许你会认为这太简单．但是，第一，简单不是缺点；第二，一切复杂的事物都是从最简单的发展而来，深刻的东西最初往往是朴素的．

1　模 糊 子 集

定义 1　论域 U 上的一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$，是指 U 到 [0, 1]的一个映射：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}:\ U \to [0,\ 1]$$

映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数．对 $x \in U$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$表示元素 x 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度，或说成 x 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属程度．

当隶属函数的值域由区间 [0, 1] 蜕化为两个数 {0, 1}(即只取值 0 或 1)，相应的模糊子集就成为通常的集合．

正如普通的集合由其特征函数所完全确定那样，模糊子集完全由其隶属函数所确定．

有限论域的子集是有限多个，如 $U=\{a, b, c\}$的子集有

$2^3=8$ 个，但它的模糊子集有无限多个. 任意一个有序的三数组，其中每一分量都是[0, 1]中的数，就确定 U 的一个模糊子集. 比如说(1, 0.9, 0)、(0.8, 0.7, 0.9)等都是. 也可用查德的记法，表示为

$$\frac{1}{a}+\frac{0.9}{b}+\frac{0}{c},\quad \frac{0.8}{a}+\frac{0.7}{b}+\frac{0.9}{c}.$$

从而更清楚地标明哪一个元素的隶属函数值是多少. 注意，不要把上述表示式误认为分式的求和. 这里，"分母"位置表示论域中的元素，"分子"位置表示相应元素的隶属度. 当隶属度是 0 时，我们约定，这一项也可省略，即

$$\frac{1}{a}+\frac{0.9}{b}+\frac{0}{c}=\frac{1}{a}+\frac{0.9}{b}.$$

例如，论域取为自然数集 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$，

则 $$\underset{\sim}{A}=\frac{0.8}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.8}{3}$$

可以解释为"2 左右".

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{0.5}{7}$$

可以解释为"大约 5、6 个".

又如，考虑人口的年龄分布，则可取论域 $U=[0, 200]$. 为描述"老年"这一模糊概念，我们稍作一些分析. 按习惯的看法，不超过 50 岁，无论如何不能看成"老年"；过了 70 岁，大家都会认为是"老年". 因此，若以 $\mu(x)$ 表示"老年" $\underset{\sim}{O}$ 的隶属函数，这个函数的定义域是[0, 200]，它在[0, 50]上恒取 0，在[70, 200]上恒取 1. 所剩的，也是麻烦

的，是[50, 70]这一段过渡期．然而，一个明显的事实是：年龄越大，被认为是“老年”的根据越充分．所以，$\mu(x)$应是年龄x的增函数．作为简化的假设，可以令它是一个线性函数，即$\mu(x)$的图形如图4所示．

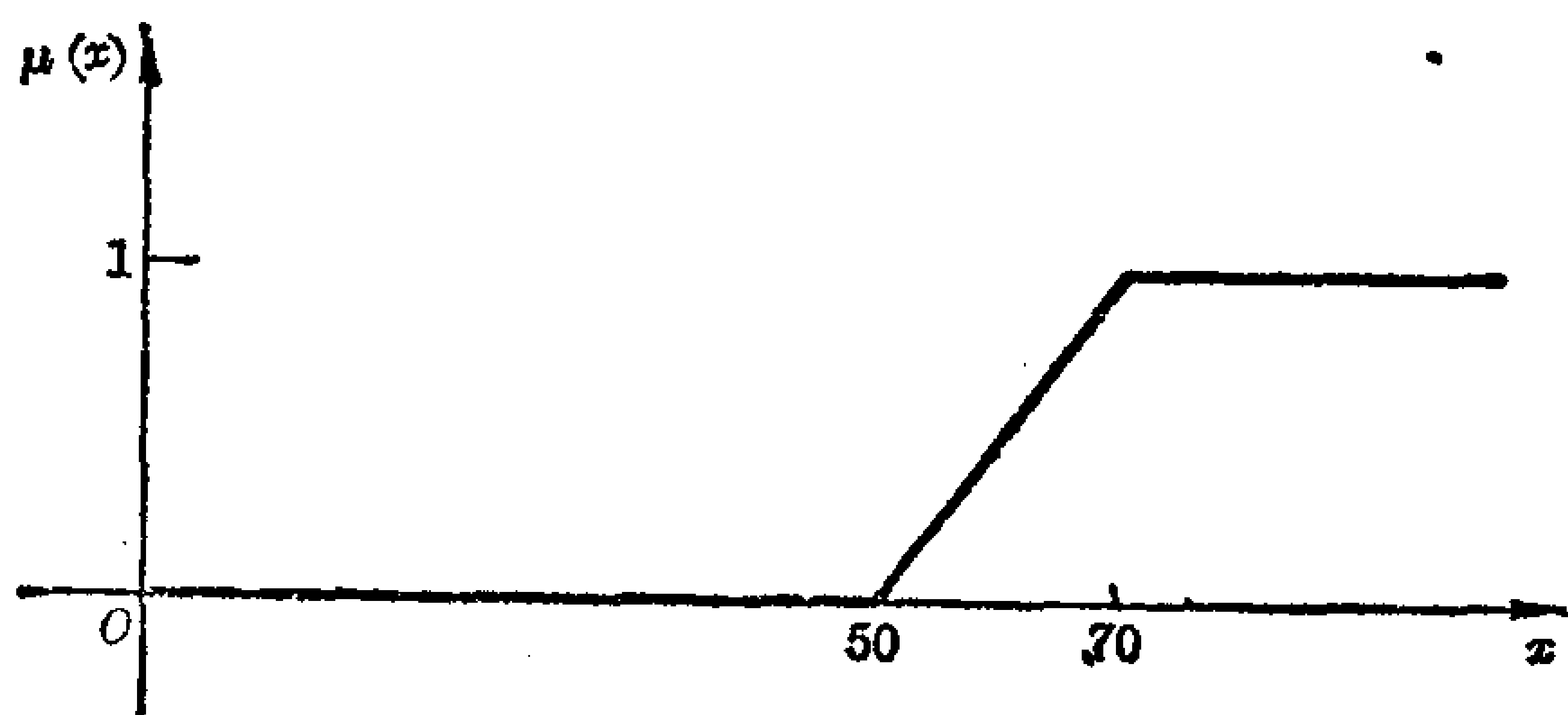


图 4

它的解析表达式为

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant 50);\\ \dfrac{1}{20}(x-50) & (50<x\leqslant 70);\\ 1 & (x>70).\end{cases}$$

当然，这里导出的“老年”$\underset{\sim}{O}$的隶属函数是比较粗糙的．如果放弃线性函数的假设，再补充其他一些条件，可以导出更细致的公式．

通过以上几个例子，可以初步领会模糊集的概念及其描述方法．紧接着的问题是如何确定模糊集合间的关系和运算．为此，不妨先考察第25页的C1)～C4)．这四条是用特征函数的语言叙述了普通集合的包含关系以及交、并、补的运算．十分有趣的是，在C1)～C4)中，并没有对f_A、

f_B 的值域作特殊要求. 至少在形式上,当 f_A、f_B 不只是取 0、1 这两个值而是取[0, 1]中的任意数时,等式 C1)~C4)的右端都是有意义的. 于是,我们可以将 C1)~C4) 一字不差地照抄如下,并以它们作为模糊集的包含关系、交、并、补运算的定义.

定义 2 设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 为论域 U 上的模糊子集, $\mu_{\underset{\sim}{A}}$、$\mu_{\underset{\sim}{B}}$ 分别为其隶属函数,则定义

$\underset{\sim}{C}1$ $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$ 当且仅当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}\leqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}$

$\underset{\sim}{C}2$ $\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}$

$\underset{\sim}{C}3$ $\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}=\mu_{\underset{\sim}{A}}\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}$

$\underset{\sim}{C}4$ $\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}=\mu_{\underset{\sim}{A}}\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}$

其中, $\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}$, $\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}$, $\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}$ 分别是 $\underset{\sim}{A}$ 的补集 $\bar{\underset{\sim}{A}}$, $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 的并集 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 的交集 $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$ 的隶属函数. $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$ 表示模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 包含于 $\underset{\sim}{B}$,或称 $\underset{\sim}{B}$ 包含 $\underset{\sim}{A}$.

当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$、$\mu_{\underset{\sim}{B}}$ 只取 0、1 两个值时, $\underset{\sim}{C}1$~$\underset{\sim}{C}4$ 就是 C1)~C4). 所以模糊集的概念和运算确实是普通集概念和运算的直接推广.

[例 1] 论域由四个人组成,即

$$U=\{甲, 乙, 丙, 丁\}$$

设 $\underset{\sim}{A}$="高个子",其隶属函数为

$$\frac{0.9}{甲}+\frac{1}{乙}+\frac{0.6}{丙}$$

或简写成 $(0.9, 1, 0.6, 0)$;

$\underset{\sim}{B}$="胖子",其隶属函数为

$$(0.8,\ 0.2,\ 0.9,\ 1)$$

求 $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$ 和 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$.

解 $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=$“胖高个”

$$=(0.9\wedge 0.8,\ 1\wedge 0.2,\ 0.6\wedge 0.9,\ 0\wedge 1)$$

$$=(0.8,\ 0.2,\ 0.6,\ 0)$$

$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=$“胖或高”

$$=(0.9\vee 0.8,\ 1\vee 0.2,\ 0.6\vee 0.9,\ 0\vee 1)$$

$$=(0.9,\ 1,\ 0.9,\ 1)$$

用语言来叙述就是，这四人中几乎不是胖就是高. 如果要找胖高个，那么大约就是甲或丙.

论域 $U=[0,\ 1]$，隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$、$\mu_{\underset{\sim}{B}}$ 由图 5 给出，那么

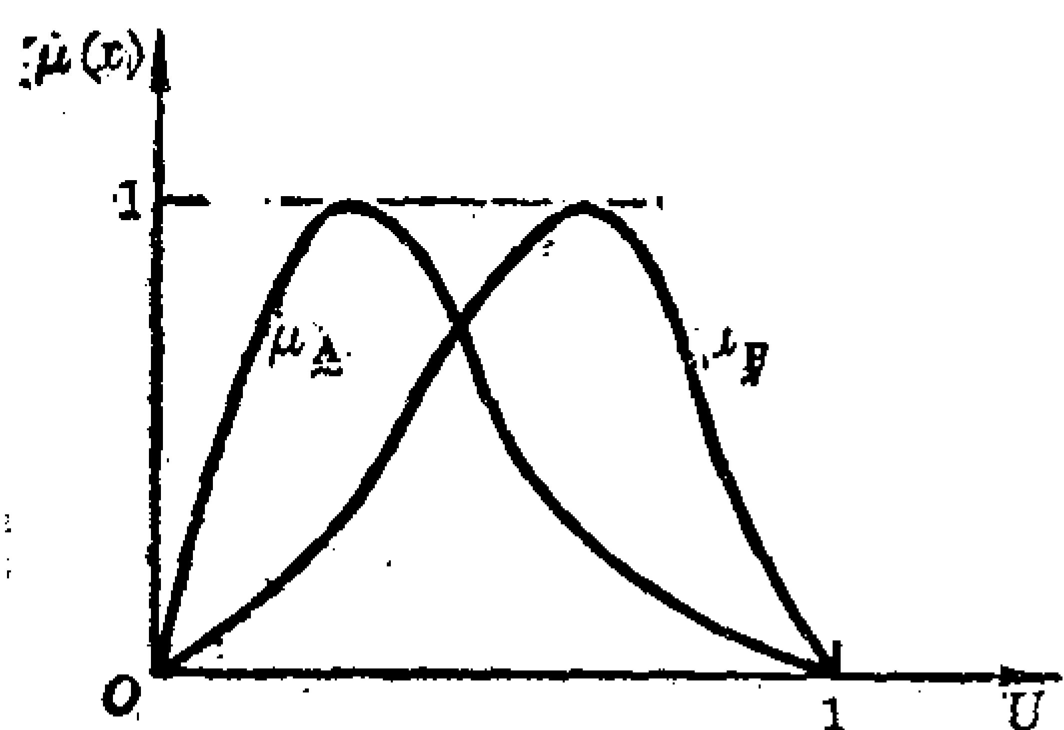


图 5

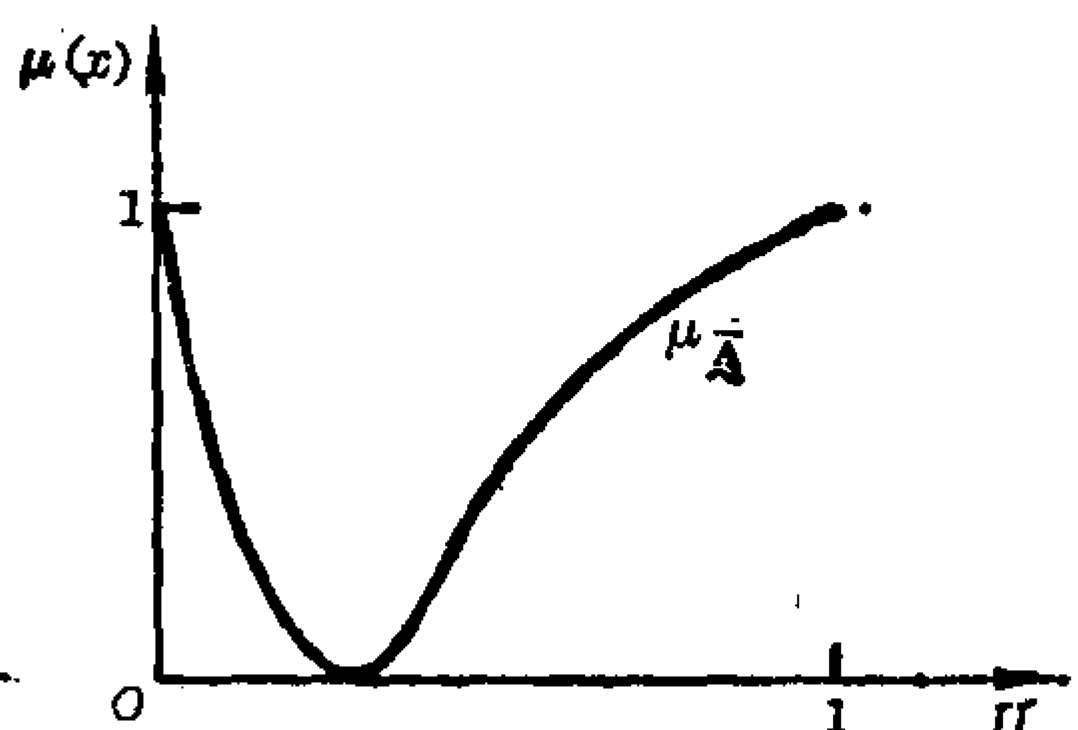


图 6

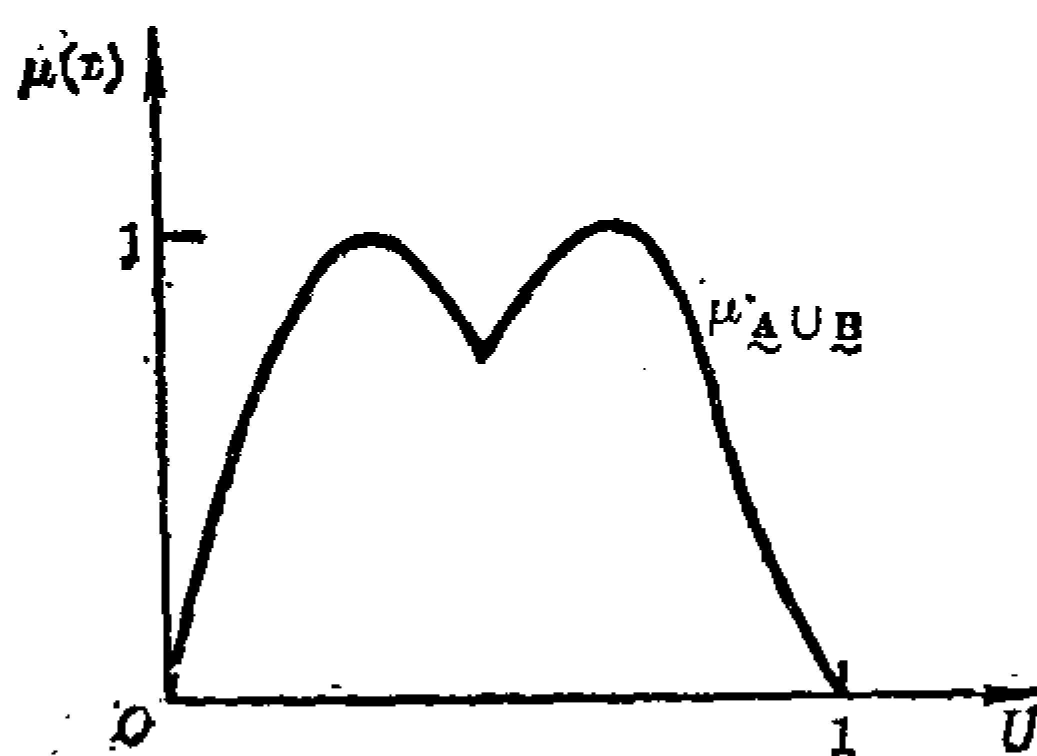


图 7

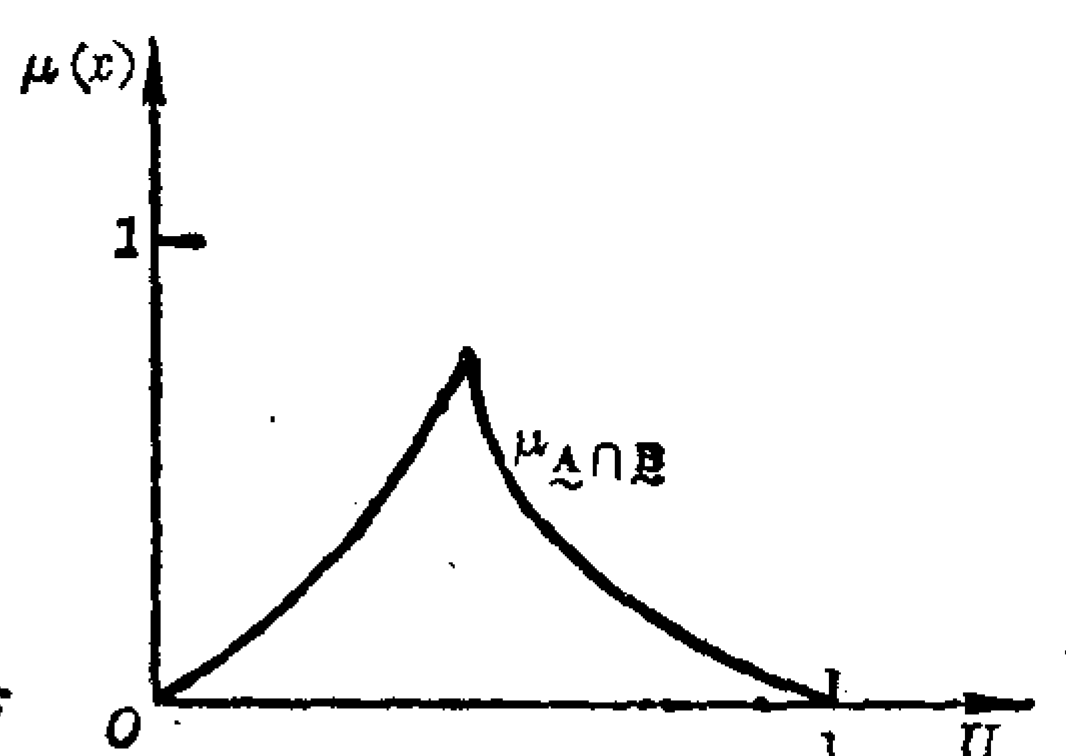


图 8

$\overline{\underset{\sim}{A}}$、$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$ 的隶属函数分别表示为图 6、图 7、图 8.

普通集合的运算满足八条重要性质 S1)～S8)，那么模糊集的运算是否也具有这些性质？我们应该逐条加以验证.

S1)～S3)的证明是显然的. 因为"取大"、"取小"运算满足等幂律、交换律、结合律等是不证自明的. S4)稍为麻烦一些，但也是成立的，S5)～S7)都不难. 例如，为证明 S5)，我们有

$$\mu_{\overline{(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})}}(x)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)$$
$$=1-(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(x))$$

固定 x，如果 $\qquad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

则 $\qquad 1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant 1-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

从而

$$\mu_{\overline{(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})}}(x)=1-(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(x))$$
$$=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$
$$=(1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x))\wedge(1-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x))$$
$$=\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x)\wedge\mu_{\overline{\underset{\sim}{B}}}(x)$$

即 S5)成立. 如果 $\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$，可类似地证明 S5)，这里从略.

我们的工作可能太顺利了，以致使人们产生一些疑惑. 如果所有的性质都一样，可真有些乏味. 我们试图建立一个新理论，结果这个新理论什么新东西都没有，这当然不符合实际，因为精确世界和模糊世界不可能完全一样. 事实上，它们确实不一样，区别就体现在八条性质的最后一条 S8). 具体地说，模糊集的运算满足 S1)～S7)的七条性质，但不满足 S8). 为说明这一点，很容易做出反例. 如令

$$\underset{\sim}{A}=(0.3,\ 0.8)$$

则 $$\overline{\underset{\sim}{A}}=(1-0.3,\ 1-0.8)=(0.7,\ 0.2)$$

而 $$\underset{\sim}{A}\cup\overline{\underset{\sim}{A}}=(0.3\vee 0.7,\ 0.8\vee 0.2)$$
$$=(0.7,\ 0.8)\neq U;$$
$$\underset{\sim}{A}\cap\overline{\underset{\sim}{A}}=(0.3\wedge 0.7,\ 0.8\wedge 0.2)$$
$$=(0.3,\ 0.2)\neq\varnothing.$$

特别是，若模糊集的隶属函数的值恒为 $\frac{1}{2}$，如

$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

则它的补集为 $\left(1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

即对模糊集来说，存在这样的集合，它的补集是它自身.

在普通集合中，$\overline{A}$ 表示 A 的补. 对应地，在逻辑上就是命题的否定. 现在对模糊集 A，$\overline{A}\cap A\neq\varnothing$，这在逻辑上似乎也可理解为命题与其否命题并非完全相排斥的. 不是"非此即彼"而是允许"亦此亦彼". 这一点正是模糊逻辑的一个要点，可参看本书的第三章的有关讨论.

所以，模糊集保留了普通集合的许多重要性质，但与普通集合也有一些带根本性的区别. 掌握它们之间的联系和区别，对学习模糊集的理论有着重要意义.

2 在图象识别中的应用

尽管我们只学习了关于模糊集概念很少的一些知识，

我们也可以用这些知识来分析一些问题了．本节我们将讨论一个图象识别方面的简单例子．

图象识别，也称模式识别，粗略地说，就是要把所研究的对象，根据它的某些特征进行识别并分类．例如，要识别写在纸上的数码字，判断它是 0，1，2，…，9 中的哪个数字，这就是对数码字图象进行识别，并分成十类的问题．也许有人会感到奇怪：这是幼儿园小弟弟、小妹妹都会做的事，还算什么问题？实际上，这不仅是问题，而且还是一个很有实际意义并且相当复杂的问题．

如果数码字是按标准的印刷体方方正正地写在纸上，识别并不困难．但是，当人们按自己习惯写数码字时，字形就千奇百怪．同是一个"1"，有长有短，有粗有细，有正有斜，还有的喜欢搞个花点子，写成"1"．对各种手写体的"1"，只要不太离谱，人们都能识别．当然，太草就不行．所以，"1"这个概念在人脑中并不是精确的而是模糊的．

又如，1 和 7 有明确的界限吗？请看下列符号

/ / 7 7 7 7 7

最左端的肯定是 1，最右端的肯定是 7，但是，中间几个呢？上方的一横该多长才能使 1 变成 7．这个例子告诉我们，数码字（更一般地，所有字）的概念确实是模糊的．

是否具有模糊识别的能力，是人和现在的电子计算机之间存在着的很大的区别．如果把人进行模糊识别的规律研究清楚，并且"教"给计算机，那么，它的意义就不只限于

文字的识别，而在天气预报、指纹识别、遥感技术、地震探测、疾病诊断、细胞识别、机器人等各方面都将有广泛的应用.

机器人也要懂点"模糊"吗？当然，可以这样说，在所有非模糊领域，机器人干得都不坏，但只要涉及模糊现象就出问题了. 例如，国外有为酒店设计的专门给客人斟酒的机器人，什么酒都会斟，就是倒不好啤酒. 因为啤酒起沫，不容易掌握，弄不好就冒了. 还有为监狱设计的机器人狱警，不怕苦，不怕死，尽心尽责，任劳任怨. 但是它的毛病就是有时分不清犯人和管理人员而闹出笑话.

现在，模糊模式识别已经成为一个专门的研究课题. 我们当然不能在这里对它进行详细的讨论，只是想用一个简化的例子来说明模糊识别的一些想法.

我们来看三角形识别.

在用计算机对染色体或白血球进行自动识别的研究中，常把问题归结为几何图形的识别. 以三角形为例. 给一个具体的三角形，要求根据这个三角形的三个内角来判断它是

$\underset{\sim}{I}$: 近似的等腰三角形

$\underset{\sim}{E}$: 近似的等边三角形

$\underset{\sim}{R}$: 近似的直角三角形

或者既不等边，也不等腰，也非直角而是普通的三角形 $\underset{\sim}{T}$.

这时，论域应取为三角形三个内角的度数，它可表成一个三数组，次序是从大到小排列，即

$$U=\{(A, B, C)\,|\,A\geqslant B\geqslant C\geqslant 0,\ A+B+C=180\}$$

则上述几种三角形应分别是 $\tilde{U}$ 上的模糊子集. 先考察等腰三角形的识别问题，其隶属函数取作

$$\mu_{\underset{\sim}{I}}(A,\ B,\ C)=1-\frac{1}{60}\min(A-B,\ B-C) \tag{1}$$

容易看出，如果三角形是精确的等腰三角形，则三个内角中至少有两个相等，即两个差数 $A-B$、$B-C$ 中至少有一个为零，从而这两个数中较小的一个为零，则 $\mu_{\underset{\sim}{I}}=1$. 另一方面，"最不等腰"的三角形，应该是一个角特别大，一个角特别小，另一个角为二者的平均，即不偏向它们中的任一个. 作为极端情况（当然，此时三角形已退化了），就是 $A=120,\ B=60,\ C=0$. 这时

$$\begin{aligned}\mu_{\underset{\sim}{I}}(120,\ 60,\ 0)&=1-\frac{1}{60}\cdot\min(120-60,\ 60-0)\\&=1-\frac{1}{60}\cdot 60=0.\end{aligned}$$

而对其他情况，如 $A=90,\ B=70,\ C=20$ 时，

$$\begin{aligned}\mu_{\underset{\sim}{I}}&=1-\frac{1}{60}\cdot\min(90-70,\ 70-20)\\&=1-\frac{1}{60}\cdot 20=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

若 $A=85,\ B=75,\ C=20$ 时，

$$\begin{aligned}\mu_{\underset{\sim}{I}}&=1-\frac{1}{60}\cdot\min(85-75,\ 75-20)\\&=1-\frac{1}{60}\cdot 10=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

即三角形越近似等腰，$\mu_{\underset{\sim}{I}}$ 越接近于 1；越不等腰，相应的隶属函数值越小，以至等于 0. 这说明，(1)式规定的隶属函

数在某种意义上还是描述了等腰三角形的特点.

类似地,对等边三角形识别可取

$$\mu_{\underset{\sim}{E}}(A,\ B,\ C)=1-\frac{1}{180}(A-C) \tag{2}$$

当 $A=B=C$ 时,是精确的等边三角形,$\mu_{\underset{\sim}{E}}=1$.不等边三角形的极端情况是一个角特别大、一个角特别小,即 $A=180$, $B=C=0$,这时 $\mu_{\underset{\sim}{E}}=0$. 同样,对直角三角形的识别可取

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(A,\ B,\ C)=1-\frac{1}{90}\ |A-90| \tag{3}$$

当 $A=90$ 时, 是精确的直角三角形, $\mu_{\underset{\sim}{R}}=1$; 当 $A=180$, $B=C=0$ 时,$\mu_{\underset{\sim}{R}}=0$.

最后,$\underset{\sim}{T}$ 的隶属函数可由以上三式确定. 事实上,因

$$\underset{\sim}{T}=\overline{(\underset{\sim}{I}\cup\underset{\sim}{E}\cup\underset{\sim}{R})}=\overline{\underset{\sim}{I}}\cap\overline{\underset{\sim}{E}}\cap\overline{\underset{\sim}{R}} \qquad (\text{德·摩根律S5}))$$

所以

$$\begin{aligned}\mu_{\underset{\sim}{T}}&=\mu_{\overline{\underset{\sim}{I}}}\wedge\mu_{\overline{\underset{\sim}{E}}}\wedge\mu_{\overline{\underset{\sim}{R}}}\\&=(1-\mu_{\underset{\sim}{I}})\wedge(1-\mu_{\underset{\sim}{E}})\wedge(1-\mu_{\underset{\sim}{R}})\\&=\left(\frac{1}{60}\min(A-B,\ B-C)\right)\\&\quad\wedge\left(\frac{1}{90}\ |A-90|\right)\wedge\left(\frac{1}{180}(A-C)\right)\end{aligned}$$

上式就是在 $\frac{1}{60}(A-B)$, $\frac{1}{60}(B-C)$, $\frac{1}{90}\ |A-90|$, $\frac{1}{180}(A-C)$ 四数中取最小的,故可写成

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}=\min\left[\frac{1}{60}(A-B),\ \frac{1}{60}(B-C),\ \frac{1}{90}|A-90|,\ \frac{1}{180}(A-C)\right]$$

有了上述准备，现在可以解决一个具体三角形的识别问题.

给出一个具体的三角形，量得三个内角分别是 $88°$、$22°$、$70°$. 则 $A=88$, $B=70$, $C=22$. 论域 U 上有四个模糊子集 $\underset{\sim}{I}$、$\underset{\sim}{E}$、$\underset{\sim}{R}$、$\underset{\sim}{T}$. 为判断 (A, B, C) 属哪一类，只需分别算出这四个集合的隶属函数中识别对象 (A, B, C) 的值，取其隶属函数值最大者即可——最有资格的，这叫做最大隶属原则，对 $(A, B, C)=(88, 70, 22)$ 有

$$\mu_{\underset{\sim}{I}}=1-\frac{18}{60}=0.7$$

$$\mu_{\underset{\sim}{E}}=1-\frac{66}{180}=0.63$$

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}=1-\frac{2}{90}\approx 0.98$$

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}=\frac{4}{180}\approx 0.02$$

结论应是把该三角形归于直角三角形 $\underset{\sim}{R}$.

当然，上面所介绍的三角形识别方法，并不太理想，还有很多可以改进的地方. 各种集合隶属函数的确定，根据就不太充分，从而不太符合实际. 例如，最大角是 $80°$ 的三角形，一眼就看出比较斜，人们通常不会把它判断成直角三角形，但 $\mu_{\underset{\sim}{I}}$ 这时的值等于

$$1-\frac{1}{90}|80-90|\approx 0.89$$

还是很高的，所以，我们还可以作些修改，以使之更加接近于实际，这将是一个很好的习题. 我们也要指出，既然问题

本身只要求近似地识别直角三角形，要完全确定地建立非此即彼的标准是不合适的．人们可以根据问题的实际背景作各种灵活处理，然后用实际识别的结果来衡量所建立的识别标准的合理性．也就是说，模糊性的处理要求人们更大的灵活性，有时也会显得更加复杂．

3 模 糊 数

你看过《伊索寓言》这本书吗？书里有个很有名的故事：过路人问一智者，要走几小时才能到达某城．智者默不作答，等过路人走一小段路以后，他才把那人叫回，答以时间．

读了这个故事，有两种反应：一种认为智者不愧为智者，每句话都要有根据．不知道过路人走路的速度，就不能告诉他要走几小时才能到达目的地．另一种认为智者实际是个迂夫子，不懂快慢概念的模糊性质．因为过路人问路，只想得到一个大致的回答，并不需要十分精确．事实上，仅靠目测要想精确估计过路人的步行速度，再据此计算出所需的时间也是不可能的．因此可以按照一般人大致的步行速度确定所需的时间，如三个小时左右，即可回答过路人的问题．

“3左右”就是模糊数．在日常生活里，人们对模糊数是运用自如，但模糊数的理论却远未完善．通常可把模糊数看成数集的一个模糊子集．这种理解当然过于宽泛，但作

为不严格的讨论，也还算是一种方式.

取论域 U 为整数集，则“1 左右”记为 $\underset{\sim}{1}$，可定义为

$$\underset{\sim}{1}=\frac{0.2}{0}+\frac{1}{1}+\frac{0.2}{2}$$

讨论和数 $\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{1}$. 不考虑隶属度为零的情况，整数 0, 1, 2 所有可能的配对为

$$\begin{array}{lll}
(0,\ 0), & (0,\ 1), & (0,\ 2) \\
0+0=0 & 0+1=1 & 0+2=2 \\
(1,\ 0), & (1,\ 1), & (1,\ 2) \\
1+0=1 & 1+1=2 & 1+2=3 \\
(2,\ 0), & (2,\ 1), & (2,\ 2) \\
2+0=2 & 2+1=3 & 2+2=4
\end{array}$$

即 $\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{1}$ 的隶属函数只在 0、1、2、3、4 上不为零. 和为 0 只出于一种情况：第一项取 0 且第二项取 0，隶属度应为 $0.2\wedge0.2=0.2$. 和为 1 有两种情况：第一项取 0 且第二项取 1，或第一项取 1 且第二项取 0，这是先合取再析取，隶属度为 $(0.2\wedge1)\vee(1\wedge0.2)=0.2$. 类似地，和为 2 的隶属度为 $(0.2\wedge0.2)\vee(1\wedge1)\vee(0.2\wedge0.2)=1$，和为 3 的隶属度为 $(0.2\wedge1)\vee(1\wedge0.2)=0.2$，和为 4 的隶属度为 $(0.2\wedge0.2)=0.2$.用式子写出来就是

$$\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{1}=\frac{0.2\wedge0.2}{0+0}+\frac{0.2\wedge1}{0+1}+\frac{0.2\wedge0.2}{0+2}$$

$$+\frac{1\wedge0.2}{1+0}+\frac{1\wedge1}{1+1}+\frac{1\wedge0.2}{1+2}$$

$$+\frac{0.2\wedge 0.2}{2+0}+\frac{0.2\wedge 1}{2+1}+\frac{0.2\wedge 0.2}{2+2}$$

$$=\frac{0.2}{0}+\frac{0.2}{1}+\frac{0.2}{2}$$

$$+\frac{0.2}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.2}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.2}{4}$$

$$=\frac{0.2}{0}+\frac{0.2}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.2}{4}\text{①}$$

这可粗略地解释为“2 左右”，以 $\underset{\sim}{2}$ 表示，即

$$\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{1}=\underset{\sim}{2}$$

所得结果与人们的习惯是相符的.

取论域 U 为实数集，则 $\underset{\sim}{a}=$“a 左右”的隶属函数可这样确定：a 肯定算 a 左右，$\mu(a)=1$. 通常说起“a 左右”，左右有界，设分别为 α, β, $\alpha<\beta$, 即小不能小于 α. 大不能大过 β, 则对 $x\leqslant\alpha$、$x\geqslant\beta$, 隶属函数 $\mu(x)$ 都恒等于 0. 问题在

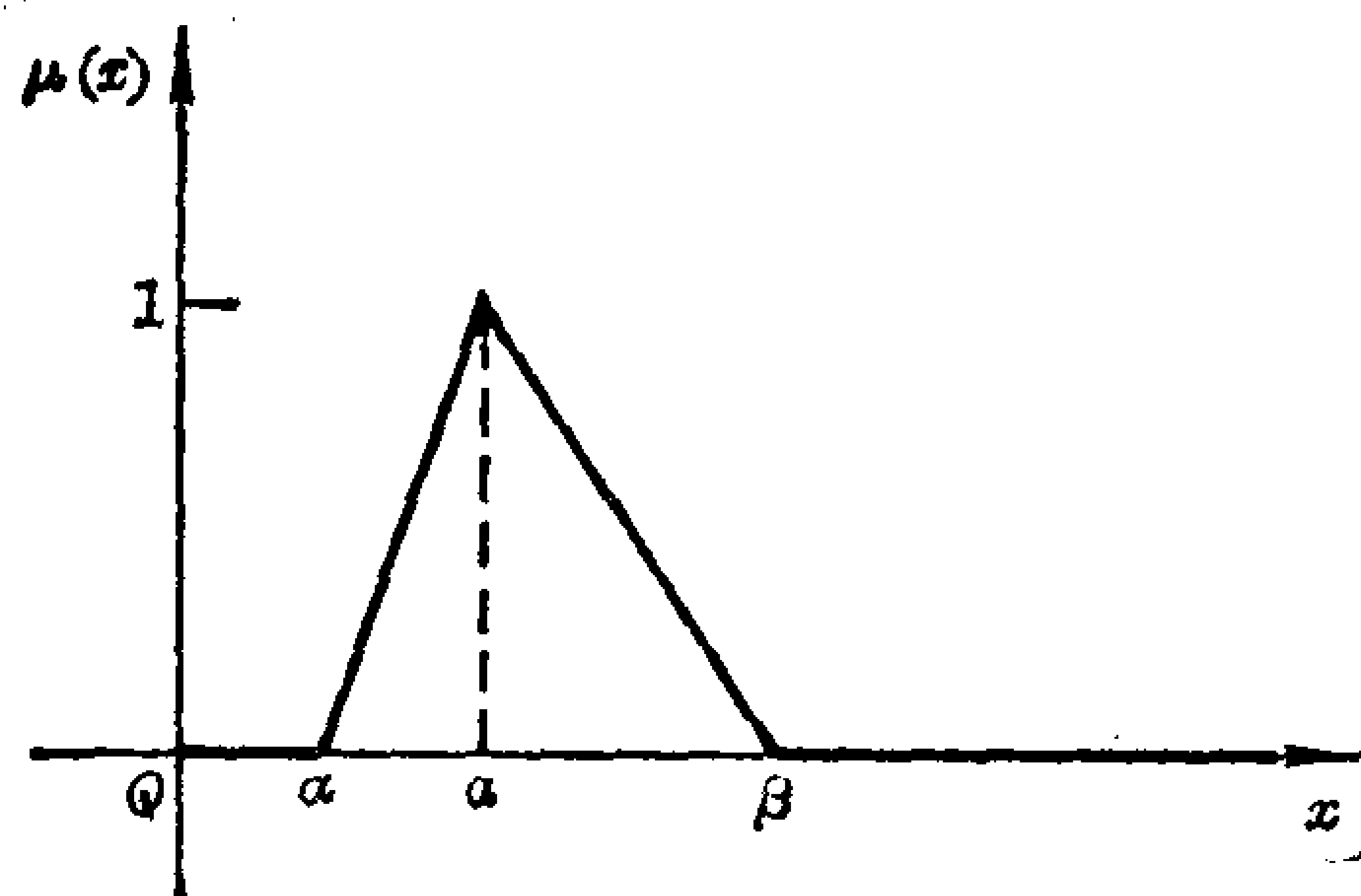


图 9

① 式中，分母之“+”是数的加法，连接两式之“+”是查德记号.

于(α, a)与(a, β)这两个区间，它们正是较难处理的"中间地带"作为最粗糙的近似，设$\mu(x)$在这两个区间都是线性函数(图9). 称这种类型的模糊数为三角形模糊数，记作$\boldsymbol{a}_\beta^\alpha$或$\boldsymbol{a}(\alpha, \beta)$，它的隶属函数的解析式是

$$\mu(x)=\begin{cases} 0 & (x\leqslant\alpha); \\ \dfrac{x-\alpha}{a-\alpha} & (\alpha<x<a); \\ 1 & (x=a); \\ \dfrac{\beta-x}{\beta-a} & (a<x<\beta); \\ 0 & (x\geqslant\beta). \end{cases}$$

三角形模糊数的加法、数乘、数除定义为

1) $\boldsymbol{a}_1(\alpha_1, \beta_1)+\boldsymbol{a}_2(\alpha_2, \beta_2)$

$$=(a_1+a_2)(\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2) \quad (1)$$

2) $$ca(\alpha, \beta)=(ca)(c\alpha, c\beta) \quad (2)$$

3) $\dfrac{c}{a(\alpha, \beta)}=\dfrac{c}{a}\left(\dfrac{c}{\beta}, \dfrac{c}{\alpha}\right)$，其中$0\notin[\alpha, \beta]$，$c$为任一通常的数. (3)

对上述规定，可作如下说明. 考虑(1)式和数当第一项取a_1且第二项取a_2时取a_1+a_2，这时隶属度为最大，是$1\wedge1=1$. 在任何情况下，和数不会小于$\alpha_1+\alpha_2$，也不会大过$\beta_1+\beta_2$，所以可看成$(a_1+a_2)(\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2)$. (2)、(3)也都类似.

[例2] 若$a=2_1^3$，$b=5_2^6$，$c=13_{12}^{14}$，求$3a+4b$，$\dfrac{13}{c}$.

解 $3a+4b=3\cdot2_1^3+4\cdot5_2^6$

$$=6_3^9+20_8^{24}=26_{11}^{33},$$

$$\frac{13}{c}=\frac{13}{13}\left(\frac{13}{12},\ \frac{13}{14}\right)=1_{0.93}^{1.08}$$

几乎就是 1.

《伊索寓言》中的智者，如果懂一点模糊数，就应该根据正常人的步行速度即大约是每小时 4 公里左右的速度来作出判断. 急着赶路，快不过每小时 6 公里；慢慢走，每小时 2 公里无论如何是有的. 换句话说，步行速度大约是 4_2^6. 若离目的地有 6 公里，则所需时间为

$$\frac{6}{4(2,\ 6)}=\frac{6}{4}\left(\frac{6}{6},\ \frac{6}{2}\right)=\frac{3}{2}(1,\ 3).$$

智者可答：一般大约要一个半小时左右. 若详细些，则再补充：快走一小时可到，慢走三小时也就足够. 当然，这时，寓言中智者的幽默也就荡然无存了.

4 模 糊 关 系

在这一节，我们想把两个集合间的二元关系推广到模糊的场合. 应该说，这个任务并不困难. 你只要把第一节定义 9 中的"子集 R"改成"模糊子集 $\underset{\sim}{R}$"就可以了，即

定义 2 $U\times V$ 的一个模糊子集 $\underset{\sim}{R}$ 称为 U 与 V 之间的一个二元模糊关系.

于是，模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 由其隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}:\ U\times V\to[0,\ 1]$$

所确定.

和第一章讨论的二元关系不同，对任意两个元素 $u\in U$，$v\in V$，现在，我们不是简单地讨论 u 与 v 符合关系还是不符合关系，而是说，u 与 v 符合关系 $\underset{\sim}{R}$ 的程度是 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(u, v)$. 这也许太抽象了. 为了说明这个问题，我们举一个例子.

实数集里两数之间的"大于"关系是通常意义的二元关系，"远大于"则是模糊的，它的隶属函数可由下式给出

$$\mu(x, y)=\begin{cases}0 & (x\leqslant y);\\ [1+100(x-y)^{-2}]^{-1} & (x>y).\end{cases}$$

于是，当 $x\leqslant y$ 时，$\mu=0$

当 $x-y=1$ 时，$\mu=\dfrac{1}{1+100}\approx 0.01$

当 $x-y=10$ 时，$\mu=\dfrac{1}{1+1}=0.5$

当 $x-y=100$ 时，$\mu=\left(1+\dfrac{1}{100}\right)^{-1}\approx 0.99$

当 $x-y=10^{3}$ 时，$\mu=(1+10^{-4})^{-1}\approx 0.9999$

用语言来叙述就是：若 $x\leqslant y$，x 当然不能是"远大于" y；若 $x-y=1$，x 是大于 y，但还不能说是远大于；若 $x-y=10$，x 不仅大于 y，说它远大于 y，也多少有点根据，但根据并不充分；若 $x-y=100$ 以至于 $x-y=1000$，则确实应该认为 x 远大于 y.

当然，"远大于"这个概念的含意与所讨论的具体问题（是讨论天文学还是日常生活问题）以及使用的计量单位有关. 因此，在"远大于"的隶属函数的表达式 $\mu(x, y)$ 中，分

母里的常数"100"以及负指数"-2"都可进行适当调整，以使设计的隶属函数更加符合实际.

现在，如果有三个集合U、V和W. U与V之间有个关系，V与W之间也有个关系，那么，U与W之间应该存在一个由前两个关系确定的关系，我们把它称为两个关系的合成. 这是一个在理论和应用上都很重要的概念.

为了讨论二元模糊关系的合成，先考虑一个具体例子.

设

$$U=\{u_1, u_2, u_3\}$$

$$V=\{v_1, v_2\}$$

$$W=\{w_1, w_2, w_3\}$$

$\underset{\sim}{R}_1 \subseteq U\times V$为$U$与$V$的二元模糊关系，隶属函数为

$$\mu_{R_1}(u_1, v_1)=0.7 \quad \mu_{R_1}(u_1, v_2)=0.2$$

$$\mu_{R_1}(u_2, v_1)=0 \quad \mu_{R_1}(u_2, v_2)=0.9$$

$$\mu_{R_1}(u_3, v_1)=0.4 \quad \mu_{R_1}(u_3, v_2)=0.3$$

为简明起见，可把它写成数表或叫矩阵①的形式

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.9 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

上述矩阵称为U与V的关系矩阵. 给出了关系矩阵，实际上就是以表格的形式给出了隶属函数的具体值. 表的读法是，横的叫行，依次表示U的元素. 竖的叫列，从左到右依次表示V的元素. 方才的矩阵是3行2列的隶属函数的函数值，如$\mu_{R_1}(u_3, v_2)$就是u_3所在行(第3行)与v_2所在

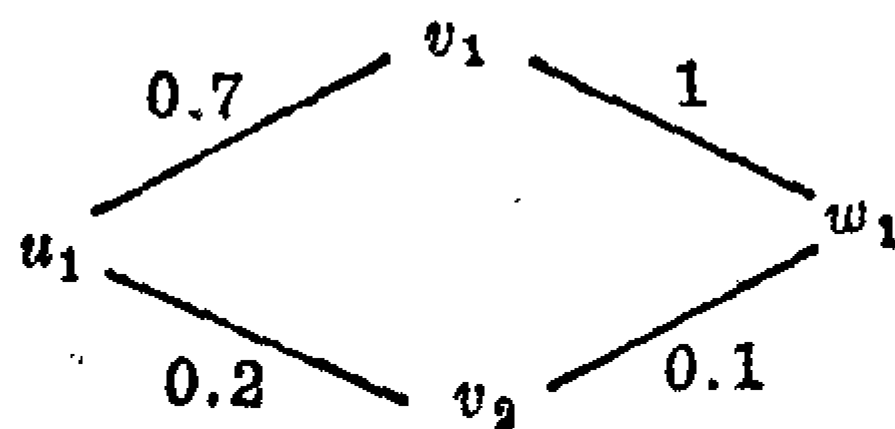
① 矩阵的有关知识请参阅上海教育出版社1979年出版的《矩阵初步》.

列(第 2 列)交叉位置上的数“0.3”.

类似地,$\underset{\sim}{R}_2 \subseteq V \times W$ 为 V 与 W 的二元模糊关系,隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{R}_2}$ 由下列关系矩阵给出

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}$$

则 $\underset{\sim}{R}_1$ 与 $\underset{\sim}{R}_2$ 的合成是 U 与 W 的二元模糊关系,以 $\underset{\sim}{R}_1 \circ \underset{\sim}{R}_2$ 表示. 它的隶属函数可由如下考虑确定: $\mu_{\underset{\sim}{R}_1 \circ \underset{\sim}{R}_2}(u_1, w_1)$ 表示 u_1 与 w_1 符合关系 $\underset{\sim}{R}_1 \circ \underset{\sim}{R}_2$ 的程度. 但 u_1 与 w_1 不是直接发生关系而是通过中间元素 v 间接发生关系,即



u_1 与 w_1 间接发生关系的方式有两个,$u_1 - v_1 - w_1$ 和 $u_1 - v_2 - w_1$. 按第一种方式, u_1 与 w_1 符合关系就要求 u_1 与 v_1 符合关系(程度为 0.7),同时 v_1 与 w_1 符合关系(程度为 1),所以 u_1 与 w_1 符合关系的程度为 $0.7 \wedge 1 = 0.7$. 按第二种方式, u_1 与 w_1 符合关系要求 u_1 与 v_2 符合关系(程度为 0.2)同时 v_2 与 w_1 符合关系(程度为 0.1),所以 u_1 与 w_1 符合关系的程度为 $0.2 \wedge 0.1 = 0.1$. 两种方式中只要有一种实现,u_1 与 w_1 就算符合关系. 进行析取,则隶属度应为

$$(0.7 \wedge 1) \vee (0.2 \wedge 0.1) = 0.7 \vee 0.1 = 0.7.$$

类似地,可算得其他值,从而

$$\begin{pmatrix}0.7 & 0.2\\ 0 & 0.9\\ 0.4 & 0.3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.1 & 0.7 & 0.8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(0.7\wedge 1)\vee(0.2\wedge 0.1) & (0.7\wedge 0)\vee(0.2\wedge 0.7) & (0.7\wedge 0)\vee(0.2\wedge 0.8)\\ (0\wedge 1)\vee(0.9\wedge 0.1) & (0\wedge 0)\vee(0.9\wedge 0.7) & (0\wedge 0)\vee(0.9\wedge 0.8)\\ (0.4\wedge 1)\vee(0.3\wedge 0.1) & (0.4\wedge 0)\vee(0.3\wedge 0.7) & (0.4\wedge 0)\vee(0.3\wedge 0.8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7 & 0.2 & 0.2\\ 0.1 & 0.7 & 0.8\\ 0.4 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$$

一般公式可写成

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_1\circ\underset{\sim}{R}_2}(u_i,\ w_j)=[\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(u_i,\ v_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{R}_2}(v_1,\ w_j)]$$
$$\vee[\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(u_i,\ v_2)\wedge\mu_{\underset{\sim}{R}_2}(v_2,\ w_j)]$$

也可写成更一般的形式

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_1\circ\underset{\sim}{R}_2}(u_i,\ w_j)=\bigvee_{v\in V}[\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(u_i,\ v_h)\wedge\mu_{\underset{\sim}{R}_2}(v_h,\ w_j)].$$

方才两个关系矩阵经过运算“∘”得出一个新矩阵，这个运算叫做矩阵的模糊乘法，它是用 $\vee$，$\wedge$ 等运算表示出来的．顺便指出，貌似简单的数表即矩阵是大有文章可做的，矩阵论是高等代数中的重要分支．

模糊关系在所谓聚类分析问题中有重要应用．聚类分析实际上就是分类问题，和上一小节讨论的图象识别不同点是，进行聚类分析时，我们没有什么现成的模式，而是要根据元素之间的联系和区别，将它们归并为若干类，使得同一类中所有元素互相之间（在某种意义上）比较相似，而不同类的元素之间相对地说差别较大．例如，把人群分成男

性、女性，分类是明确的．但若要按相貌进行分类，相像的算一类、不像的不在一类，这就是模糊聚类分析．

模糊关系的另一应用是所谓的综合评判．在许多实际场合，往往会遇到对某一对象的“全面评价”问题，即对所研究的对象从诸如性能、价格、外观等有关因素出发加以比较从而做出评价．如果考虑的因素只有一个，且对它的评价有明确的标准，问题比较容易解决．例如，比较人的身高，只要有一把尺子就足够了．但若需要考虑的因素很多，评价的标准又不那么确切，如外观，情况就比较复杂．综合评判为解决这类问题提供了一种方法．

令 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ 为着眼因素的集合．例如，买衣服着眼的因素可以是衣料质量、做工、样式、价格；挑篮球运动员，着眼的因素则是身高、弹跳力、灵活性、意志或者还有其他．$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为评语集合，一般往往是{优、良、中、合格、差}（也可分细些，也可简化一些）．以 r_{ij} 表示从第 i 个因素着眼，对被评对象作出第 j 种评语的隶属度，$0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$, $i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$．把 r_{ij} 排成一个 m 行 n 列的表，它实际上就是 U 与 V 的一个关系矩阵，通常称为单因素评价矩阵，以 R 表示．

全面评价一个对象，要着眼于所有 m 个因素．但在作出最后结论时，这些因素的参考价值不尽相同．例如，爸爸去买衣服，可能对衣料质量要求高，价格也很重要，对样式、做工就不讲究，妈妈去买，情况就不同了．质量虽然要考虑，样式最重要．因此，在进行评价时，评价者对各个因素

重视程度的异同起很大作用. 于是, 可以把评价者对各种因素的重视情况看成 U 的模糊子集 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$, $0\leqslant a_i\leqslant 1$, 则 A 与 R 的合成就是评价者综合各种因素的考虑对被评对象作出的最终评价

$$B=A\circ R \qquad (1)$$

它是 V 的一个模糊子集, 这里"$\circ$"是矩阵的模糊乘法. 注意 $A=(a_1, \cdots, a_m)$ 也可看作 1 行 m 列的矩阵. 我们也常叫 A 为权系数向量.

以买衣服为例, 有一件衣服, 从衣料质量、做工、式样、价格等角度孤立去看, 评价是

$$\begin{array}{c} \\ R= \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{优} & \text{良} & \text{中} & \text{合格} & \text{差} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.9 & 0.6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{衣料质量} \\ \text{做工} \\ \text{式样} \\ \text{价格} \end{array}$$

用语言来叙述就是: 衣料质量还较好、做工极优、式样一般、价格较高. 如果买衣服的是一位经济宽裕的老派人士, 讲究衣料的质量和做工, 式样不太注意, 价格不考虑, 则可以有

$$A=(0.8,\ 0.8,\ 0.3,\ 0)$$

从而 $B=A\circ R=$

$$(0.8,\ 0.8,\ 0.3,\ 0)\circ\begin{pmatrix} 0.2 & 0.9 & 0.6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$=(0.8,\ 0.8,\ 0.6,\ 0.3,\ 0)$$

即评价还是比较好的.

另一方面，如果评价者是一位年轻人. 对式样十分挑剔，价格要求低廉，其他不予考虑，对他来说

$$A=(0,\ 0,\ 1,\ 0.7)$$

则 $$B=A\circ R=(0,\ 0,\ 0.6,\ 0.8,\ 0.7)$$

评价是勉强合格.

现在，如果有一个人，对服装的鉴赏能力很高. 他(或她)买的衣服大家都很欣赏. 那么，由于单因素评价矩阵相对来说变化不大，这就说明此人的权系数向量 A 有独到之处. 因此，如果大家都能向他学习，采用他的权系数向量，每个人就都能达到他的那种鉴赏水平. 这是一个很重要的问题. 我们知道，名师未必出高徒. 例如，名医的徒弟不一定是名医，名画家也不一定就能调教出名画家，原因自然很复杂，但肯定不能完全归诸于师傅保守、徒弟懒惰. 事实上，名师有许多宝贵经验，"只可意会，不可言传"，自己都表达不清楚，当然难以向徒弟传授. 因此，如果有种方法，能根据名师的实践从某个侧面总结出他们的经验，将有助于上述问题的解决. 作为一种简化，假定名师是按综合评判的模式(1)式进行判断(再强调一句，这是一种根据并不十分充分的简化假设)，那么，所谓名师的经验就集中表现在他对权系数向量的独到的选取. 于是，现在的问题就是反过来由他的判断结果 B 及单因素评价矩阵 R，求权系数向量 A，使 A 满足方程

$$B = A \circ R$$

这个方程也叫模糊关系方程．这个总结经验的问题是综合评判的逆问题．

当 U、V 都是有限集，矩阵 R 是由普通的数组成时，模糊关系方程的求解已被很多作者研究，并且取得很好的结果．

应该指出，人的大脑在对复杂现象进行评价时，确实有一种善于综合考虑各方面因素的能力．因此，实际上是采用了某种独特的综合评判模式．对人脑这种特殊能力的研究，无疑是人工智能的一个重要问题．当然，这一节所介绍的模式，是初等的．它的优点是方法简单，使用方便，但比较粗糙．要想更深入地探讨人脑的工作机制，科学家还要走很长的一段路．

三　模糊逻辑和模糊决策

"天啊！我说了四十多年散文，一点也不晓得"．（引自莫里哀：《贵族迷》主人公茹尔丹的一段话）

这位茹尔丹先生一生中说的都是散文，但一点也不知道散文是什么东西．不知我们是不是也像茹尔丹先生那样，一生中用的都是模糊逻辑，但一点也不知道模糊逻辑是什么东西．

1　从二值逻辑到模糊逻辑

逻辑与集合的关系是密切的．现在我们已经成功地把集合的概念推广到模糊集的情形，这就使我们对建立一套与之平行的模糊逻辑理论充满信心．

考虑由个体"a"和谓词"属于 A"组成的命题"a 属于 A"．在普通的情形，A 是论域 U 的一个普通子集．命题"a 属于 A"的值等于 A 的特征函数在 a 上的值，为真时，值为 1；为假时，值为 0．这就是通常的二值逻辑．

作为上述二值逻辑的直接推广，设 $\underset{\sim}{A}$ 为 U 的模糊子集，“a 属于 $\underset{\sim}{A}$”就是所谓的模糊命题．这个命题的值很自然地就定义为 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数在 a 上的值．这时，对命题的值，我们不是简单地判断为“真”或“假”，即“1”或“0”，而是理解为“真的程度”，即可以是[0, 1]中的任一值．

例如，“张三是高二(二)班学生”，这是一个普通的命题，或真或假，是完全确切的．“张三是高个子”，就不是通常意义下的命题．因为“高个子”是一个模糊集．所以，它是一个模糊命题．如果张三对“高个子”的隶属度是 0.8，则模糊命题“张三是高个子”的真值就是 0.8．或说成：命题“a是高个子”当 a 为张三时的真值是 0.8．

模糊命题的否定、析取、合取等运算的定义和普通命题完全一样．我们所需要做的只是把原来讨论中的“命题”理解成“模糊命题”，“集合”理解成“模糊集合”，特征函数则代之以隶属函数．特别是，对模糊命题 $\underset{\sim}{P}$，如用 $T(\underset{\sim}{P})$ 表示其隶属度(或说真值)，仍有

$$T(\neg\underset{\sim}{P})=1-T(\underset{\sim}{P}) \tag{1}$$

$$T(\underset{\sim}{P}\wedge\underset{\sim}{Q})=T(\underset{\sim}{P})\wedge T(\underset{\sim}{Q})$$

$$T(\underset{\sim}{P}\vee\underset{\sim}{Q})=T(\underset{\sim}{P})\vee T(\underset{\sim}{Q})$$

于是，二值逻辑中所有重要性质，除 L8 外，全部成立．L8，即补余律，对模糊集失效，即模糊子集和它的补集的并不一定是全集、模糊子集和它的补集的交不一定是空集．用逻辑的语言来说就是，一个命题和它的否命题的析取不一定是真命题，它们的合取也不一定是假命题．有一种批评意

见，认为命题和它的否命题不可能同时为真或者同时为假，这在人类思维是最基本的，以至于违反这个原则，逻辑就不成其为逻辑. 这种看法的根据是不充分的. 因为，只要仔细考察周围的人和我们自己，就会发现事实上我们大家都在经常不断地违反这个原则. 如对一位一米七的男青年，说他高，不算高；说他不高，还算高. 应该说，背离补余律，是模糊逻辑区别于传统的二值逻辑的一大特点，正是由于这个特点，使它更接近于辩证法，更接近于人类思维所使用的逻辑.

接第二节的例1，用 $\underset{\sim}{P}$ 表示"是高个子"，$\underset{\sim}{Q}$ 表示"是胖子"则 $\underset{\sim}{P}$(甲)表示模糊命题"甲是高个子"，$\underset{\sim}{Q}$(丙)表示"丙是胖子"等等. 于是

$$\underset{\sim}{P}(\text{甲})\text{的真值}=T(\underset{\sim}{P}(\text{甲}))=0.9$$
$$T(\underset{\sim}{P}(\text{乙}))=1$$
$$T(\underset{\sim}{P}(\text{丙}))=0.6$$
$$T(\underset{\sim}{P}(\text{丁}))=0$$

同样

$$T(\underset{\sim}{Q}(\text{甲}))=0.8$$
$$T(\underset{\sim}{Q}(\text{乙}))=0.2$$
$$T(\underset{\sim}{Q}(\text{丙}))=0.9$$
$$T(\underset{\sim}{Q}(\text{丁}))=1$$

则命题"甲不是高个子"的真值为

$$T(\neg\underset{\sim}{P}(\text{甲}))=1-T(\underset{\sim}{P}(\text{甲}))=1-0.9=0.1$$

"甲是胖高个"的真值为

$$T(\underset{\sim}{P}(\text{甲})\wedge\underset{\sim}{Q}(\text{甲}))=T(\underset{\sim}{P}(\text{甲}))\wedge T(\underset{\sim}{Q}(\text{甲}))$$
$$=0.9\wedge 0.8=0.8$$

“这四人不是胖就是高”=“这四人都是胖或高’

$$=(\underset{\sim}{P}(\text{甲})\vee\underset{\sim}{Q}(\text{甲}))\wedge(\underset{\sim}{P}(\text{乙})\vee\underset{\sim}{Q}(\text{乙}))$$
$$\wedge(\underset{\sim}{P}(\text{丙})\vee\underset{\sim}{Q}(\text{丙}))\wedge(\underset{\sim}{P}(\text{丁})\vee\underset{\sim}{Q}(\text{丁}))$$

则 $T(\text{“这四人不是胖就是高”})=T(\bigwedge_{x\in U}(P\vee Q)(x))$

$$=(0.9\vee 0.8)\wedge(1\vee 0.2)\wedge(0.6\vee 0.9)\wedge(0\vee 1)$$
$$=0.9\wedge 1\wedge 0.9\wedge 1=0.9$$

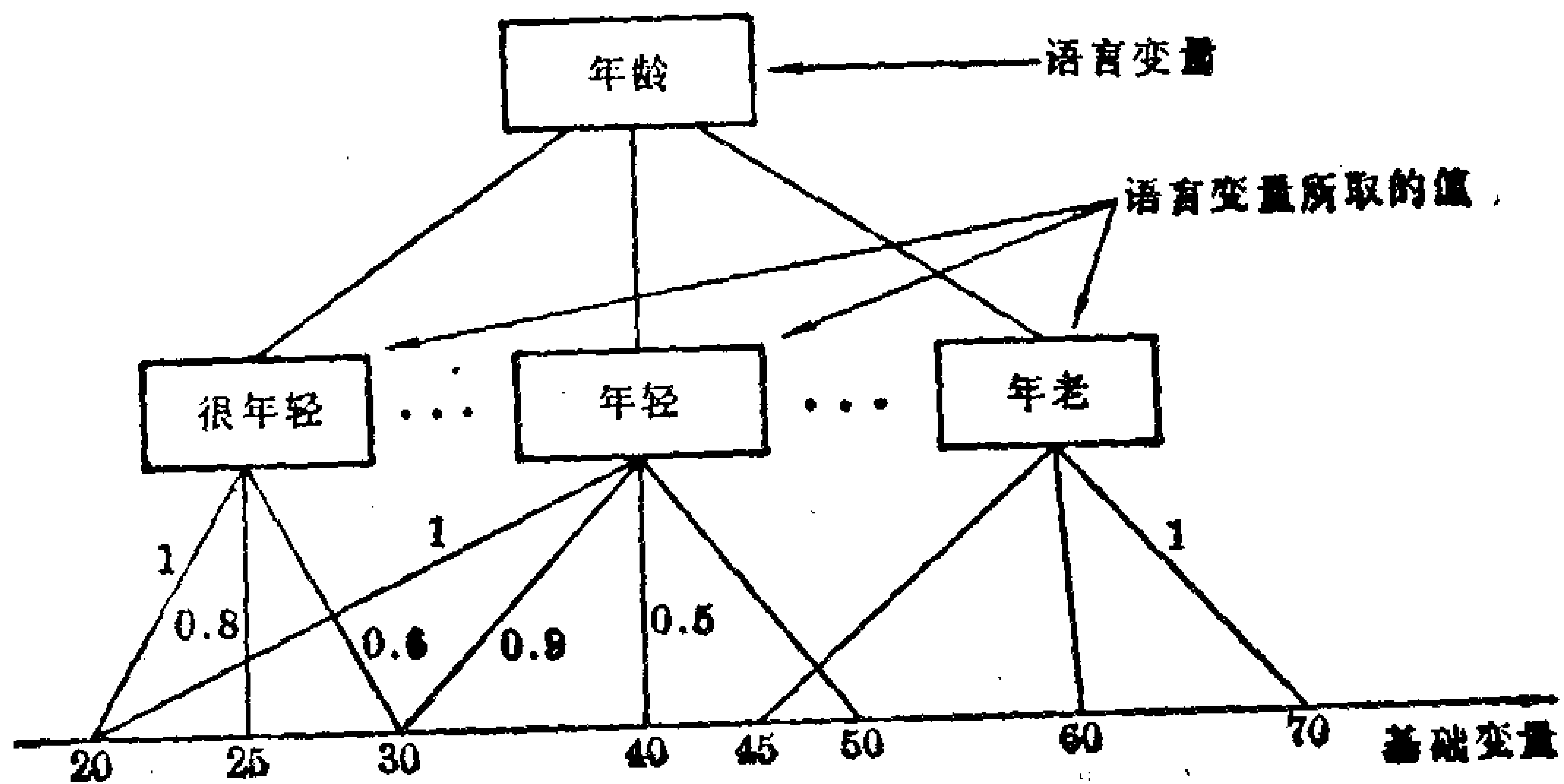
这个命题的真值是 0.9. 所以，第二节的例 1 作出的结论说：这四人中几乎不是胖就是高是有根据的.

对上述讨论结果，也许你们中有人感到不满意. 因为，在实际生活中，没有人会在每叙述一个命题时就附上真值大小精确数的说明. 机器人可能需要这样干，真实的人肯定不会这样干. 相反，我们经常用一些“完全肯定”、“非常正确”、“非常非常正确”、“不太可能”、“有点对”、“几乎全错”等语言来描述命题的真实程度. 为了解决这些问题，我们需要引进所谓语言变量的概念.

2 语 言 变 量

一个变量，如果所取的值不是通常的“数”，而是自然语言或人工语言(如计算机语言)的词或句，就叫做语言变量. 一般说来，词可以看成是论域中的模糊子集，因此没有数那么精确. 所以，语言变量方法特别适用于描述某些难于精密

量化的复杂现象. 例如,“年龄”是一个语言变量. 这个变量取的“值”可以是: 年轻、不年轻、老、很老、十分老、不年轻也不老等. 这些值中的每一个都是论域 $U=[0, 100]$ 中的模糊子集. 论域中的元素即个体,可看成基础变量,则它们之间的关系可由下图给出.



语言值通常可分为两类,一类是由少数几个原词,如老、年轻等组成;另一类是由原词加上一些修饰词,如“很”、“稍许”、“非常”、“十分”等,并按照一定规则生成,这个规则称为句法规则. 原词和由原词派生出的其他词都是论域中的模糊子集,因此,各个语言值的实际含意由相应的隶属函数给出,这可称为词义规则. 这样,我们有

定义 1 一个语言变量由下列五个因素确定:

1) 变量的名称,如年纪、容貌;

2) 变量所取的值即语言值的集合,如对年纪来说,语言值的集合为年轻、不年轻、老、很老、十分老等等;

3) 论域,它的元素称为基础变量;

4) 句法规则，由原词加上修饰词按照句法规则产生出其他词；

5) 语义规则，对应于每一个语言值，给出它的隶属函数以说明它表示的具体含意.

使用哪些修饰词，具体情况须作具体分析，这和讨论的语言变量有关. 在多数情况下常用的修饰词有：很(也叫非常)、略(比较)、极(非常非常)、微(稍微、有点)等.

定义 2 如果原词的隶属函数是 $\mu(x)$，则规定：

1) "很"原词的隶属函数为 $[\mu(x)]^2$；

2) "略"原词的隶属函数为 $[\mu(x)]^{\frac{1}{2}}$；

3) "极"原词的隶属函数为 $[\mu(x)]^4$；

4) "微"原词的隶属函数为 $[\mu(x)]^{\frac{1}{4}}$.

例如，设论域 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$，原词"大"、"小"的隶属函数为

$$\text{“大”}=\frac{0.4}{5}+\frac{0.6}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$\text{“小”}=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.2}{4}+\frac{0.1}{5}$$

于是，

$$\text{“很大”}=\frac{0.16}{5}+\frac{0.36}{6}+\frac{0.64}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$\text{“极大”}=\frac{0.03}{5}+\frac{0.13}{6}+\frac{0.41}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$\text{“很小”}=\frac{1}{1}+\frac{0.64}{2}+\frac{0.36}{3}+\frac{0.04}{4}+\frac{0.01}{5}$$

$$\text{“不大不小”}=\text{“不大”}\wedge\text{“不小”}$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{0.2}{7}\right)$$

$$\wedge\left(\frac{0.2}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.9}{5}+\frac{1}{6}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)$$

$$=\frac{0.2}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{0.2}{7}$$

"不很大也不很小"

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.84}{5}+\frac{0.64}{6}+\frac{0.36}{7}\right)$$

$$\wedge\left(\frac{0.36}{2}+\frac{0.64}{3}+\frac{0.96}{4}+\frac{0.99}{5}+\frac{1}{6}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)$$

$$=\frac{0.36}{2}+\frac{0.64}{3}+\frac{0.96}{4}+\frac{0.84}{5}+\frac{0.64}{6}+\frac{0.36}{7}$$

应该指出，定义 2 的规定并不完全符合自然语言中相应的词意，充其量是一种近似．如何更合理地描述自然语言中的这些副词，是语言学中一个值得继续探讨的问题.

[例 1]　若"老年"的隶属函数为

$$\mu_{老}(x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant 50),\\ \frac{1}{20}(x-50) & (50<x\leqslant 70),\\ 1 & (x>70),\end{cases}$$

则"很老"的隶属函数是

$$\mu_{\text{很老}}(x)=[\mu_{\text{老}}(x)]^2=\begin{cases}0 & (x\leqslant 50),\\ \frac{1}{400}(x-50)^2 & (50<x\leqslant 70),\\ 1 & (x>70).\end{cases}$$

"不很老"的隶属函数为

$$\mu_{\text{不很老}}(x)=1-\mu_{\text{很老}}(x)$$

$$=\begin{cases}1 & (x\leqslant 50),\\ 1-\frac{1}{400}(x-50)^2 & (50<x\leqslant 70),\\ 0 & (x>70).\end{cases}$$

注意，它和"很不老"是有区别的，后者的隶属函数是

$$\mu_{\text{很不老}}(x)=[\mu_{\text{不老}}(x)]^2$$

$$=\begin{cases}1 & (x\leqslant 50),\\ \left[1-\frac{1}{20}(x-50)\right]^2 & (50<x\leqslant 70),\\ 0 & (x>70).\end{cases}$$

这样，利用少量原词的隶属函数，再根据事先约定的某些句法规则，就能描述许多内容更加丰富的复合词的词意. 这有它的重要的理论意义和实用价值.

在模糊逻辑中，最重要的一类语言变量叫**语言真值**.这时论域取为$U=[0, 1]$，原词为"真"、"假". 但这里的"真"不同于二值逻辑的"真". 后者的值是精确的数 1，前者的值是模糊数"大约 1".同样，模糊逻辑的"假"不同于二值逻辑的"假". 后者的值为精确的数 0，前者则为模糊数"大约 0". 如果把"大约 1"、"大约 0"看成三角形模糊数(见第 42

页)，由于论域是单位区间[0,1]，这两个模糊数的隶属函数就是正方形的两条对角线(图10). 即

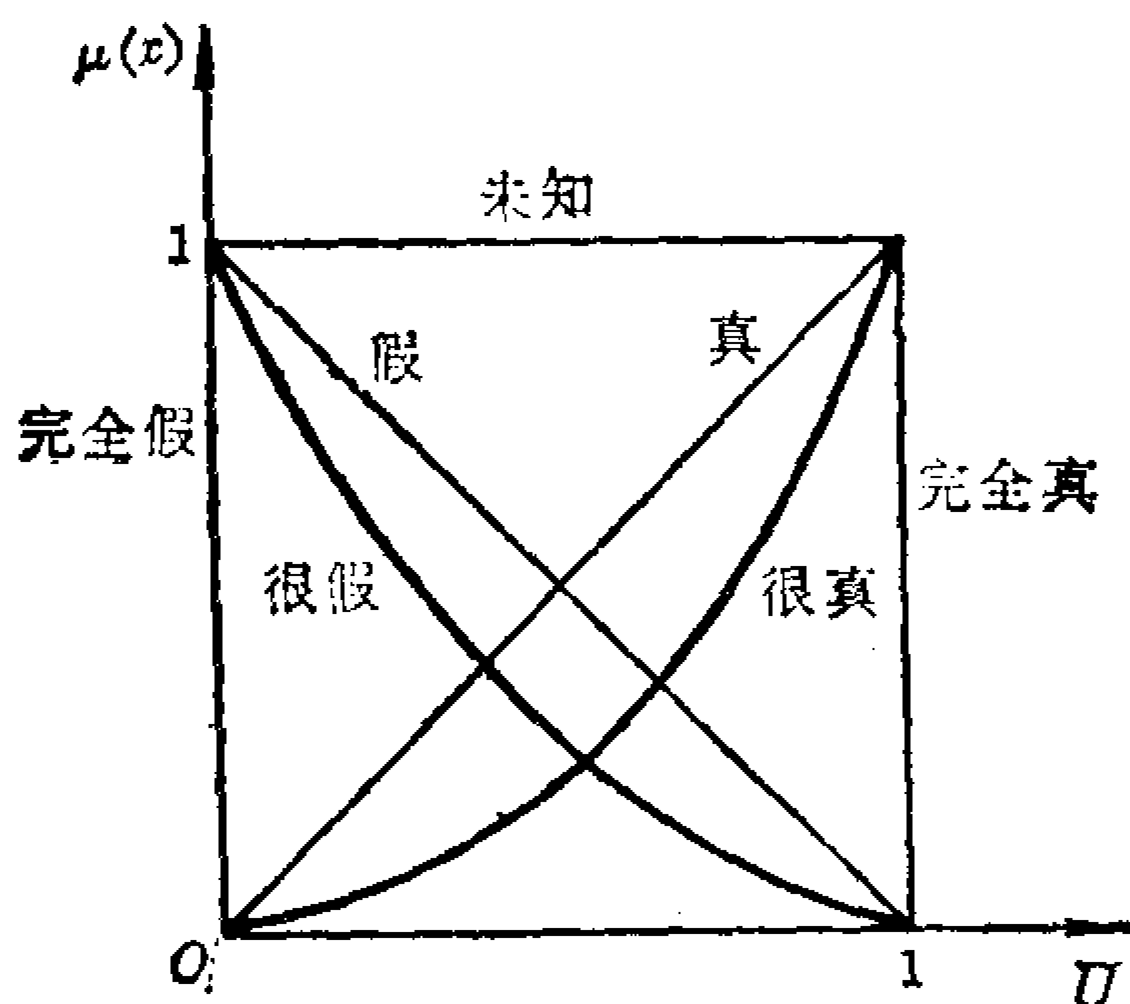


图 10

$$\begin{aligned}\mu_{真}(x)&=x\\ \mu_{假}(x)&=1-x\end{aligned}\qquad(1)$$

应用我们熟悉了的句法规则

$$\mu_{很真}(x)=x^2$$

$$\mu_{很假}(x)=(1-x)^2$$

$$\mu_{比较真}(x)=x^{\frac{1}{2}}$$

$$\mu_{比较假}(x)=(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mu_{极真}(x)=x^4$$

$$\mu_{极假}(x)=(1-x)^4$$

二值逻辑中的"真"的隶属函数只在1上取值1，其他都取值0，所以，应把它理解成"完全真"，即

$$\mu_{完全真}(x)=\begin{cases}1 & (x=1);\\ 0 & (x\neq 1).\end{cases}$$

同样，二值逻辑中的"假"，现在应理解成"完全假"，即

$$\mu_{完全假}(x)=\begin{cases}0 & (x\neq 0);\\ 1 & (x=0).\end{cases}$$

当然，上述对原词"真"、"假"词义的理解，也还有可以探讨的地方. (1)式的规定，实际上是把"假"看成"真"的否定，即"不真"="假"，这种定义并不太符合实际. 例如，"不

好”未必就“坏”，“不美”未必就“丑”. 所以，把“假”看成“不真”，是过于简单. 怎么解决这个问题？“真”的隶属函数一种更接近实际的定义可以是

$$\mu_{真}(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant a);\\ 2\left(\dfrac{x-a}{1-a}\right)^2 & \left(a\leqslant x\leqslant \dfrac{a+1}{2}\right);\\ 1-2\left(\dfrac{x-a}{1-a}\right)^2 & \left(\dfrac{a+1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right).\end{cases}$$

这里 a 是常数，且 $0<a<1$.

现在，“假”的定义不是“真”的否定，而是把“假”的隶属函数和“真”的隶属函数看成关于 $x=\dfrac{1}{2}$ 是对称的，即

$$\mu_{假}(x)=\mu_{真}(1-x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)(图\ 11).$$

有时，把上面论域$U=[0,\ 1]$改成下述有限集，在应用中更方便些，即

$$U=\{0,\ 0.1,\ 0.2,\ \cdots,\ 0.9,\ 1\}$$

“真”、“假”的隶属函数定义如下：

$$“真”=\frac{0.5}{0.7}+\frac{0.7}{0.8}+\frac{0.9}{0.9}+\frac{1}{1}$$

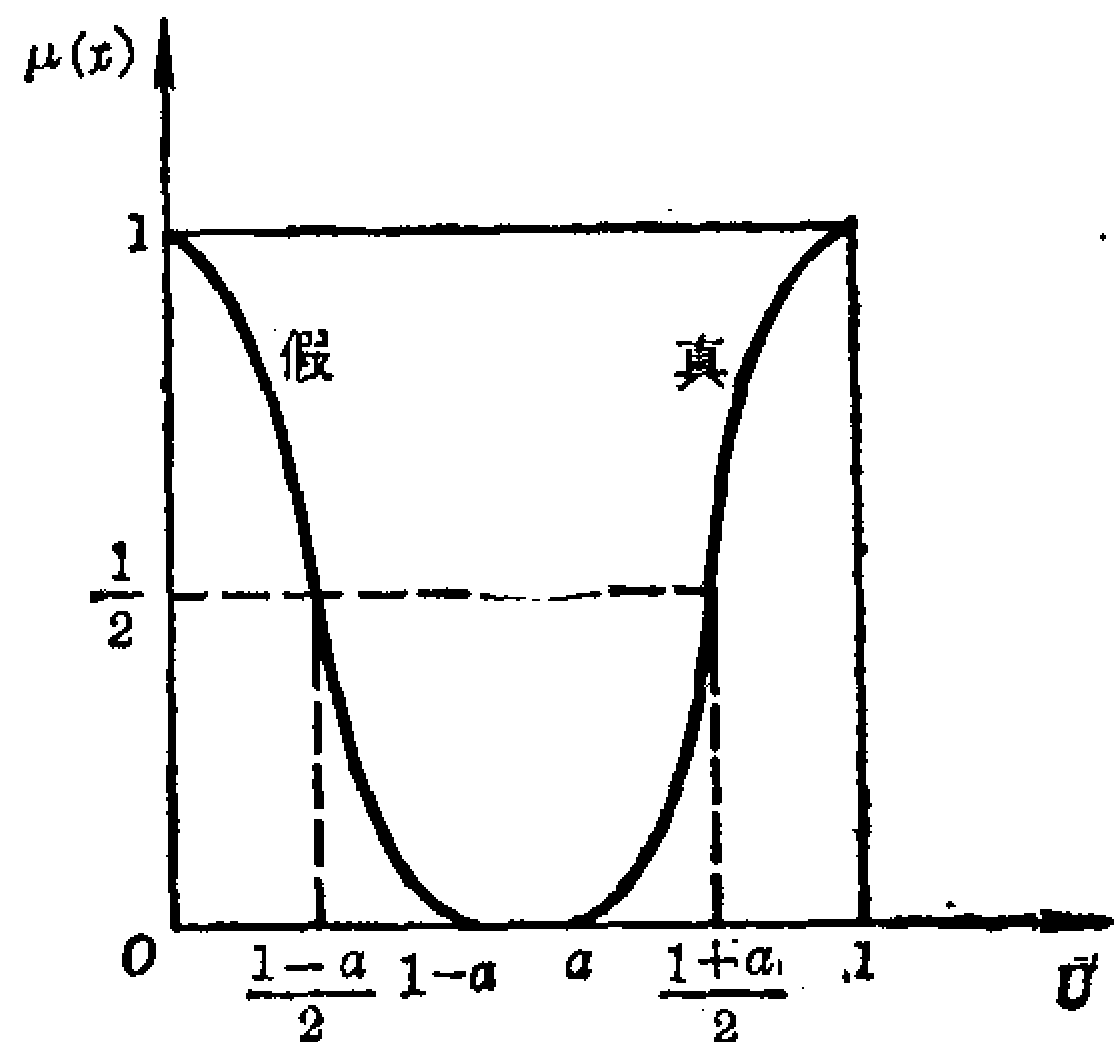


图 11

“假”的隶属函数和“真”对称，

$$“假”=\frac{0.5}{0.3}+\frac{0.7}{0.2}+\frac{0.9}{0.1}+\frac{1}{0}.$$

根据第三节第1小节(1)式$T(\neg \underset{\sim}{P})=1-T(\underset{\sim}{P})$，于是

$$“非真”=\frac{1}{0}+\frac{1}{0.1}+\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.3}+\frac{1}{0.4}+\frac{1}{0.5}+\frac{1}{0.6}+\frac{0.5}{0.7}+\frac{0.3}{0.8}+\frac{0.1}{0.9}$$

$$“非假”=\frac{0.1}{0.1}+\frac{0.3}{0.2}+\frac{0.5}{0.3}+\frac{1}{0.4}+\frac{1}{0.5}+\frac{1}{0.6}+\frac{1}{0.7}+\frac{1}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{1}$$

“真”与“非假”、“假”与“非真”显然是有区别的.

以语言值为真、假值的逻辑，称为模糊语言逻辑. 从直观上看，它给人类的推理提供了一种比传统的二值逻辑更为实际的结构. 特别是，它为我们在下一节要讨论的近似推理——一种不精确但也不是太不精确的推理模式提供了理论基础.

3 近似推理

传统逻辑中推论的基本规则是假言推理. 按这一规则我们能够从命题 P 的真假和蕴含重言式 $P\Rightarrow Q$ 中推断出命题 Q 的真假. 例如，若 P 表示“张三住院”，Q 表示“张三生病”，那么，若“张三住院”真，“张三生病”也真.

然而，在人类的很多推理中，使用的是假言推理的模糊形式而不是它的精确形式. 换句话说，已知的是: P真，$P^*\Rightarrow Q$，这里 P^* 和 P 差不多. 于是，我们的结论是 Q 接近于

真．这种推理模式称为近似推理，也叫似然推理．例如，a 和 b 是两个数．已知 $a=b$，$a=5$ 则 $b=5$．这是传统逻辑．如果说，已知 a 和 b 差不多，a 很小，问 b 是多少？这就是近似推理．为说明近似推理的基本思想，我们仍然从一个具体例子讨论起．

设论域 $U=V=\{1, 2, 3, 4\}$．"近似相等"是 $U\times V$ 的一个二元模糊关系，即

$$
\begin{aligned}
R=&\text{"近似相等"}\\
=&\frac{1}{(1,\ 1)}+\frac{1}{(2,\ 2)}+\frac{1}{(3,\ 3)}+\frac{1}{(4,\ 4)}\\
&+\frac{0.5}{(1,\ 2)}+\frac{0.5}{(2,\ 1)}+\frac{0.5}{(2,\ 3)}+\frac{0.5}{(3,\ 2)}\\
&+\frac{0.5}{(3,\ 4)}+\frac{0.5}{(4,\ 3)}
\end{aligned}
$$

它的关系矩阵

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0.5 & 0 & 0\\
0.5 & 1 & 0.5 & 0\\
0 & 0.5 & 1 & 0.5\\
0 & 0 & 0.5 & 1
\end{pmatrix}
$$

令 a 小，"小"由 U 上模糊集确定，假设为

$$
\frac{1}{1}+\frac{0.6}{2}+\frac{0.2}{3}
$$

若 a 取 1，a 近似等于 b，b 为 1 的隶属度是 $1\wedge1=1$；a 取 2，b 为 1 的隶属度是 $0.6\wedge0.5=0.5$；a 取 3，b 为 1 的隶

属度是 $0.2\wedge 0=0$; a 取 4, b 为 1 的隶属度是 $0\wedge 0=0$. 这四种情形中的任一个，都能导致 b 为 1, 即 b 为 1 是上述四种情形的析取，它的隶属度应是

$$(1\wedge 1)\vee(0.6\wedge 0.5)\vee(0.2\wedge 0)\vee(0\wedge 0)$$
$$=1\vee 0.5\vee 0\vee 0=1.$$

类似地，b 为 2 的隶属度是

$$(1\wedge 0.5)\vee(0.6\wedge 1)\vee(0.2\wedge 0.5)\vee(0\wedge 0)$$
$$=0.5\vee 0.6\vee 0.2\vee 0=0.6;$$

b 为 3 的隶属度是

$$(1\wedge 0)\vee(0.6\wedge 0.5)\vee(0.2\wedge 1)\vee(0\wedge 0.5)$$
$$=0\vee 0.5\vee 0.2\vee 0=0.5;$$

b 为 4 的隶属度是

$$(1\wedge 0)\vee(0.6\wedge 0)\vee(0.2\wedge 0.5)\vee(0\wedge 1)$$
$$=0\vee 0\vee 0.2\vee 0=0.2.$$

从而 b 应由

$$\frac{1}{1}+\frac{0.6}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.2}{4} \tag{1}$$

确定.

如果记 a 为 $A=(1,\ 0.6,\ 0.2)$, b 为 $B=(1,\ 0.6,\ 0.5,\ 0.2)$, 易见 $B=A\circ R$ 恰是第 49 页的公式(1). 以后由 a 求 b 就可用这一公式. 为解释所得结果的含意，我们按第三节里定义 2 将由原词“小”加上若干修饰词产生出的语言值的隶属函数算出，并列表如下:

$$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \tag{2}$$

小	1	0.6	0.2	0
很　小	1	0.36	0.04	0
比较小	1	0.77	0.45	0
极　小	1	0.13	0	0
有点小	1	0.88	0.67	0

表 (2) 起"词典"的作用. 我们希望能利用这个词典从隶属函数的角度查出它应描述的派生"词". 但是, 严格地说, (1) 对应不上 (2) 中的任一个, 词典中没有"幸好"这个词, 但它接近于"比较小". 所以, 我们可以把 (1) 式粗略地说成"比较小". 这种做法称为语言近似, 也就是用自然语言来叙述隶属函数所反映的特性. 于是, 可把上述推理过程表达为

A: a 是小的　　　　前提
R: a 和 b 近似相等　　　　前提
B: b 比较小　　　　近似结论　　(3)

已经指出, 由 A、R 求 B, 正是大家早已熟悉的模糊关系的合成运算即第二节第 4 小节 (1) 式. 所以, 前面的"近似相等"关系实际上提供了近似推理的一种一般性方法即所谓的合成规则, 它可叙述如下:

设 u、v 分别是在论域 U、V 取值的量, 若 u 取的值由 U 上的模糊集 A 描述, R 为 $U\times V$ 中的一个二元关系, 则 v 由下列方程确定

$$B=A\circ R$$

这里 $A\circ R$ 为 A 和 R 的合成, B 为 V 的模糊子集. 即

$$\left.\begin{array}{ll} u\text{是}A & \text{前提} \\ u\text{与}v\text{符合关系}R & \text{前提} \\ \hline v\text{是}B & \text{近似结论} \end{array}\right\} \qquad (4)$$

因(4)中 B 恰由公式 $B=A\circ R$ 给出，所以，综合评判实际上也是一种近似推理.

广义来说，使用模糊逻辑进行推理都可以叫做近似推理. 合成规则(4)只是近似推理的一种简单形式. 但是，由于充分使用语言变量这一独特的工具，再辅以适当的句法、语义规则，近似推理的合成规则能够帮助我们直接总结人们某些未能上升到理论高度的实践经验，这使我们在关于人类某些思维活动的定量研究方面又前进了一步，是十分有意义的.

[例 2] 请你到市场买某种商品，给的命令是："如果价钱便宜质量又好就多买一点". 你到市场转了一圈，应该如何做决定——究竟买多少？

解 显然，"价钱便宜"、"质量好"、"多买一点"分别是三个论域上的模糊子集，为简单起见，设

$$\text{“价钱便宜”}=\frac{1}{0.2}+\frac{0.4}{0.25}+\frac{0}{0.3}+\frac{0}{0.35}$$

$$\text{“质量好”}=\frac{1}{\text{优}}+\frac{0.5}{\text{中}}+\frac{0}{\text{劣}}$$

$$\text{“多买一点”}=\frac{0}{10}+\frac{0}{20}+\frac{0.8}{30}+\frac{1}{40}$$

则"价钱便宜，质量又好"这个模糊概念如何表示呢？ 首先它的论域应是前两个论域的直积，相应的隶属度由合取给

出：

$$\frac{1\wedge 1}{(0.2,\text{优})}+\frac{1\wedge 0.5}{(0.2,\text{中})}+\frac{1\wedge 0}{(0.2,\text{劣})}$$
$$+\frac{0.4\wedge 1}{(0.25,\text{优})}+\frac{0.4\wedge 0.5}{(0.25,\text{中})}+\frac{0.4\wedge 0}{(0.25,\text{劣})}$$
$$+\frac{0\wedge 1}{(0.3,\text{优})}+\frac{0\wedge 0.5}{(0.3,\text{中})}+\frac{0\wedge 0}{(0.3,\text{劣})}$$
$$+\frac{0\wedge 1}{(0.35,\text{优})}+\frac{0\wedge 0.5}{(0.35,\text{中})}+\frac{0\wedge 0}{(0.35,\text{劣})}$$
$$=\frac{1}{(0.2,\text{优})}+\frac{0.5}{(0.2,\text{中})}+\frac{0}{(0.2,\text{劣})}$$
$$+\frac{0.4}{(0.25,\text{优})}+\frac{0.4}{(0.25,\text{中})}+\frac{0}{(0.25,\text{劣})}$$
$$+\frac{0}{(0.3,\text{优})}+\frac{0}{(0.3,\text{中})}+\frac{0}{(0.3,\text{劣})}$$
$$+\frac{0}{(0.35,\text{优})}+\frac{0}{(0.35,\text{中})}+\frac{0}{(0.35,\text{劣})}$$

现在，命题“如果价钱便宜，质量又好，就多买一点”是前两个论域的直积与第三个论域的模糊关系 R，换句话说，仍然是一个模糊子集．它的隶属度可由下述矩阵给出（参看第二节第4小节）：

如果价格是 0.2、质量为优，这种情形被定为“价钱便宜，质量又好”的隶属度是 1；从而若(0.2，优)则以隶属度 $1\wedge 1$ 买 40 个、以 $1\wedge 0.8$ 买 30 个．类似地，如果价格是 0.2、质量为中，这种情形被定为“价钱便宜，质量又好”的隶属度是 0.5，从而若(0.2，中)则以隶属度 $0.5\wedge 1=0.5$ 买 40 个、以 $0.5\wedge 0.8=0.5$ 买 30 个．于是，关系矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}0&0&0.8&1\\0&0&0.5&0.5\\0&0&0&0\\0&0&0.4&0.4\\0&0&0.4&0.4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

现在，你到市场转了一圈，如果弄清该商品只有一种，价格是 0.25，质量属中，即(0.25，中)，则

$$A=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

由(4) $$B=A\circ R=(0,\ 0,\ 0.4,\ 0.4)$$

应以 0.4 的隶属度买 30 个，以 0.4 的隶属度买 40 个.

如果商品的价格和质量并不都很精确（集市贸易就属这种情况），那么应该把它看成模糊子集，如

$$A=(1,\ 0.9,\ 0,\ 0.9,\ 0.7,\ 0,\ 0.2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

即“价格是 0.2 或稍贵一点，质量不错”，则

$$B=A\circ R=(0,\ 0,\ (1\wedge 0.8)\vee(0.9\wedge 0.5)$$

$$\vee(0\wedge 0)\vee(0.9\wedge 0.4)\vee(0.7\wedge 0.4),$$

$$(1\wedge 1)\vee(0.9\wedge 0.5)\vee(0\wedge 0)\vee(0.9$$

$$\wedge 0.4) \vee (0.7 \wedge 0.4))$$
$$= (0, 0, 0.8, 1)$$

即我们很容易地就可以做出决定：买 40 个.

这个方法看来有些笨，我们上街买东西从来不会做这种运算. 可是，它已提供了一种决策的模式，你却可以把这个方法教给机器人. 掌握这种方法的机器人显然比它们的父兄灵活一些，它懂一点模糊思维，不至于像它们的长辈那么蠢. 这应该说是一个可喜的进步.

当然，从这个小小的例子，我们也已经能看出不少问题：第一，要把一些命令、规则、经验用模糊关系的形式表达出来通常是有相当难度的；第二，模式(4)给出的结果是一个模糊判断. 有的模糊判断如(0, 0, 0.8, 1)容易据以做出决策：买40个；有的判断如(0, 0, 0.4, 0.4)就不容易据以做出决策. 多数实际决策问题我们最后总是希望能做出确定性的判决：究竟买几个？根据模糊判断做出确定性的判决，是相当复杂而重要的问题，也是至今还未很好解决的问题.

4 MYCIN 系统的推理规则

MYCIN 是第一个有实用价值的专家系统（1974 年）. 所谓专家系统是一种能模拟人类思维活动的计算机系统. 它能把专家解决某些问题的知识以适当的形式存入计算机，然后根据输入的原始数据，按一定的规则去进行推理，做出判断和决策. 因此，这种系统可在某种程度上起着专

家的作用，所以叫专家系统．例如 MYCIN 系统主要就用于为某种疾病的诊断和治疗提供咨询服务．

MYCIN 系统的推理规则很有特色，现将其原始考虑简介如下：

设有一组条件，一个待判断的假设 h．从正面看，若症状 e_1 成立，对假设 h 可信的信念会有所增强，增强的程度记为 $MB(h, e_1)$

$$0 \leqslant MB(h, e_1) \leqslant 1$$

$MB(h, e_1)=0$ 表示毫无增强，$MB(h, e_1)=1$ 表示增至最强，即 h 可信．考虑另一症状 e_2，e_2 成立也会对假设 h 可信的信念有所减弱，减弱的程度记为 $MD(h, e_2)$

$$0 \leqslant MD(h, e_2) \leqslant 1$$

$MD(h, e_2)=0$ 表示毫无减弱，$MD(h, e_2)=1$ 表示减至最弱，即 h 不可信．两方面综合起来看，若症状 e_1 与 e_2 皆成立，h 可信的程度应是两者之差，把它称为可信因子 $CF(h)$，即

$$CF(h)=MB(h, e_1)-MD(h, e_2) \quad -1 \leqslant CF(h) \leqslant 1$$

MYCIN 系统的推理规则规定为

$CF>0$ 即 $MB>MD$，判断“h 可信”为真(TRUE)；

$CF=0$ 即 $MB=MD$，不做判断(UNKNOWN)；

$CF<0$ 即 $MB<MD$，判断“h 可信”为假(FALSE)．

若把 MB 看成 h 成立的真值，MD 就是 h 成立的假值，即不成立的真值．它们都可取[0, 1]中的任何值且是分别独立确定的．由此可见，MYCIN 系统的推理规则也是建立

在模糊真假值基础上的一种近似推理．这种推理模式的特点在于，它强调对命题的成立与否不能只从单方面看，而要从正反两方面综合进行考虑．一般地说，对命题 P，若从某个角度看，P 成立的程度为 μ；从另一角度看，P 不成立的程度为 $\lambda'=1-\lambda$（即从这一角度看，λ 为 P 成立的程度），则

若 $\mu>\lambda'$，判断"P 真"(TRUE)；

若 $\mu=\lambda'$，不做判断(UNKNOWN)； (5)

若 $\mu<\lambda'$，判断"P假"(FALSE)．

例如，考察一个人，不能只看长处，或只看短处，要两方面都看．看长处，优点为 μ；看短处，缺点为 $\lambda'=1-\lambda$，则

若 $\mu>\lambda'$ 即 $\mu+\lambda>1$，优点大于缺点，此人可取；

若 $\mu=\lambda'$ 即 $\mu+\lambda=1$，优点相当缺点，不做判断； (6)

若 $\mu<\lambda'$ 即 $\mu+\lambda<1$，优点小于缺点，此人不可取．

进一步，如果能够精确地估计出 μ、λ' 的数值，还可考虑两者的差值以讨论命题"真"的程度、"假"的程度等等．

MYCIN 系统的推理规则比经典的二值逻辑更加接近于人的思维规律，而且带有一些辩证法的色彩．美国全国人工智能协会主席费根鲍姆(E. A. Feigenbaum)曾说：MYCIN 系统是使人工智能从玩偶世界迈进真实世界的一类计算机系统中的第一个！确实，人的思维与行动往往伴随着一定程度的模糊性。这种模糊性代表了思维活动中生动灵活的一面，从而使人能高效并可靠地传递和处理信息．因此，人工智能要从玩偶世界迈进真实世界，没有一点模糊集的概念和思想是不可能的！

四 前景的展望

这本小书不可能全面涉及模糊数学的主要内容，我们只是希望向读者介绍有关模糊集合的一些最基本的概念和想法.

从1965年查德明确提出模糊集的概念以来，二十年过去了. 今天，模糊数学虽然还不是一棵直立挺拔茂密参天的大树，但也不再是刚刚出土的幼苗. 从根本上说，模糊数学是应用数学，它是否成熟，取决于它的应用是否成功、广泛和深刻. 目前，模糊数学已经在包括气象科学、生物、化学、环境科学、心理科学、教育科学、农业科学、地质科学、地震科学、医学等众多的领域的应用中取得了初步成果. 另一方面模糊集合的提出也对传统数学理论本身产生广泛，有时也颇为深刻的影响.

1 人工智能

人工智能的重要性已不用多说，这里只着重强调两点：

第一，从近期目标看，当前人工智能研究的主要领域，最重要的就是专家系统．在第三节第4小节里，我们对专家系统的概念已经作了通俗的介绍．目前专家系统的问题主要是知识表达的方式还不十分成熟，推理手段也不多．关于推理手段，我们在三3，三4节曾讨论了近似推理最简单的模式．但这只是初步尝试，远未成熟，还有许多工作要做．知识表达方式即知识库的建立和完善，是另一重要的困难问题．人的知识是用语言和文字保存和传递的．由于客观事物是无穷无尽的，语言必须力求用最小的单位表达尽可能多的信息，否则就将非常累赘．用同一个词表达各种不同的含意．从而大大节约语言单位，是自然语言的一个很重要的特点．这就是说，词无须象某些精确概念所要求的那样界限分明．它在一定程度上的模糊性赋予知识体系以必不可少的灵活性．另一方面，语言的上下文限制又恰好能使它在一个特定的场合只表示一种界限分明而非模糊的概念．总之，在涉及到专家系统的"智能"的这两个核心问题上，看来，模糊集的理论都可能发挥作用．

第二，从智能科学的远期目标看，应该把它的探索和新型计算机的研制联系起来，在所谓第五代电子计算机的研制中，日本先走了一步．据报道，1985年在日本航空、电子技术审议会向科技厅提交的一份咨询报告中又公布了着手研制第六代计算机的设想．这个报告指出，目前开发中的第五代计算机只具有"推理"的机能，是人工智能发展的初级阶段，第六代计算机则能象人那样认识、思考、推理、学习

是一个更接近于人脑的多功能"智能系统".报告强调,要完成这项研制任务,仅仅依靠现有计算机技术的"延伸"是十分困难的. 必须把对人的思考过程的研究成果同计算机技术的最新成就结合起来,搞好多学科、多领域的综合性研究.

这里的关键问题是要弄清人的大脑究竟是怎样思维的,人脑和电子计算机即电脑的工作原理异同之处究竟何在?有趣的是,尽管人们现在可以上天,可以入地,但对长在自己肩膀上的脑袋了解得很不够,在这方面研究的任何进展,都可能对新型计算机的研制产生巨大的推动.应该指出,把模糊数学、模糊逻辑和大脑工作原理的探索联系起来,已经不只是纯理论的分析,而获得了生物学研究成果的支持. 和五十年代冯·诺依曼的猜测不完全相同. 最近,一位芬兰的大脑生理学家提出,用来构建大脑和计算机的基本元件的活动行为是完全不同的. 计算机的基本元件是晶体管,大脑的基本元件叫做"突触",这位生理学家认为,晶体管和突触的一个首要差别是,突触不止具备计算机使用的关、开这两种状态,突触能够部分地开,部分地关.所以突触除了相当于二值逻辑的0和1这两种状态之外,还可能有中间值,比如十分之九、十分之二,等等.用模糊逻辑的语言来说,真值不仅可以取0、1两种极端情形,而且可以取0、1之间的中间值.如果这一结果能进一步得到证实,那么,模糊数学方法在智能科学研究中的地位,就不言而喻了. 其实,一些著名的计算机科学家也早已意识到,目前的数字电子计算机可能在过早的阶段就把某些物理量抽象成0和1,

一开始就弄掉了大量有用的信息．这样，大脑生理学家、逻辑学家、计算机科学家想到一起来了，这是一个好兆头．

2 经济科学和管理科学

其次应该提到的是经济科学和管理科学．

从历史上看，经典数学方法向经济科学领域的渗透，开始确实是为了摆脱经济学中某些基本概念和推理方法的模糊性与主观随意性，即希望实现经济学从定性到定量、从描述性科学到精密科学的转变．在这个方向的努力取得了重要成果并且导致了数理经济学、计量经济学的建立和发展．因此，现在讨论模糊数学方法在经济学研究中的应用，可能会被认为是一种倒退．但是，仔细考察与经济学有关的"数量"概念，我们将发现在经济学研究中使用查德意义下的模糊概念和方法，是由经济学本身的特点决定的．首先，经济学中有些量，并不是某个真实量的具体观测值．如国民收入这个数字，并不是真的把每一个国民的收入统计起来再累加得到，而是在某些约定下用具体资料计算出来的．这些约定即实际的计算方法，在经济学家间看法并不一致．因此，有的经济学家也认为，上述数字所反映的，"充其量不过是某一时期内的一种倾向罢了"．其次，经济分析所依据的许多概念，本质上不是精确的，而是模糊的．例如，为分析中小企业问题，要对大、中、小企业做出区别；在国土经济学中，离不开诸如可耕地、森林等概念；讨论经济发展规划，有

小康水平的提法，所有这些，细究起来，都是模糊的．如果考虑到在现实经济生活中，人的心理、感情、经验、习惯经常在起作用，那就应该承认，经济现象确有某些重要特征是和物理世界根本不同的．用本质上属于力学的经典数学方法来描述经济现象，在某些情况下是很不合适的．用经典数学方法建立起来的数学模型之所以并不总能十分令人满意地接近实际经济现象，其症结或许在此．

有一种看法，认为社会主义经济是有计划的商品经济，计划就要求精确，否则就不成其为计划．因此，这个生产多少，那个消费多少，希望能建立一个数学模式计算得一清二楚，尽可能精确．这种看法，值得商榷．什么叫计划？经常地、自觉地保持的比例性，就是计划性．商品经济的一个重要特点是“活”：生产条件千差万别，需求情况千变万化；价值规律，既可认识，又不可穷尽．因此，就总体说，我们的计划不可能巨细皆备，无所不包，精密无误．那么理想化的东西不存在于现实之中．我们的计划只能是粗线条的和有弹性的，目的在于保证重大比例关系比较适当，使国民经济大体按比例地协调发展．显然，“比较”、“大体”都是模糊的概念．

因此，从根本上说，用模糊数学方法来研究经济现象，特别是宏观经济规律，是符合实际的．当然，目前这方面的工作仍然是十分初步的，在很大程度上都是经典工作的简单平移，在方法上和结果上都没有新的突破．

模糊数学在管理科学上的应用状况要好一些．

和经济学一样，管理科学也是既古老又年轻．说古老，

因为管理思想，古已有之，说年轻，因为它真正成为一门科学，也就是从本世纪初开始．近几十年来，管理学经历了一个从“软”到“硬”，又由“硬”到软硬结合的变化．第二次世界大战后，运筹学盛行，管理学家大量使用数学模型和电子计算机．在这段时间，管理科学(management science)和运筹学(operations research)在有些人看来就是同义语．例如，他们认为，管理的目的，无非就是如何把有限的资源分配给不同的部门或单位，某个部门或单位在得到资源后如何有效地加以利用，使之产生最大的效益．具体地说，就是在生产中要求最低成本，最大产量；在销售中要求得到最大利润；在资源分配方面要求做到最合理；作为消费者，要求得到最大满足．

从经典数学的角度看，这些就是求极值或叫最优化问题．只要把最优解求出来，问题就得到解决．

但是，五十年代末期，有些学者提出了批评意见，认为上述理论虽有强调定量分析的优点，但忽略了实际经济生活中的不确定性和现实世界中的复杂性以及作为决策者的人的认识的局限性．他们认为，在复杂的客观世界中，有些问题也许根本不存在最优解，另一些问题也许存在某种可能的最优解，但这种最优解只有在必须了解到充分信息之后才能做出．如果不具备这个前提，它始终只是潜在的最优解，而不是实际的最优解．例如，按照商品经济的原则，在非垄断的条件下，消费者在购买同类商品时总是选价格最低的．但是，又有哪一位顾客能跑遍整个市场找出最低价

格的商店再决定购买与否？任何一个消费者实际上都无法掌握关于商品价格的全部信息，因此，只要价格对他来说是可接受的，即令他满意，他就可以买．换句话说，在实际管理工作中作决策的人，并不是理性世界的人，而是“管理的人”．“管理的人”是现实世界的人，是讲究实际的人．“管理的人”有知识、有感情、有抱负，也有局限性．他的行事标准是令人满意的标准，而不是经典数学意义的最优标准．我们在引言中就已指出，“令人满意”是一个模糊的概念．

讨论模糊数学在管理科学中的实际应用时，必须注意这个问题对高层和基层组织来说有很大差别．基层组织遇到的问题往往重复性强，这样，时间长了，经验积累多了，就能掌握它们的规律——或是确定性的因果规律，或是随机性的统计规律．于是，我们就能建立一套定型的方法，知道遇到什么情况，应该如何判断，作出什么决策．这正是一般运筹学所讨论的问题．例如，一个企业经过一段时间之后，形成了存贮货物的程序，什么情况下应该存什么货，批量是多少，存贮论给我们提供这种方法．这样，遇到类似问题，针对每种情况都有成套的固定程序．决策人员所要做的只是用这个固定的程序去计算、估量、评价和选择，这类决策称为程序型决策．

但是也有另外一种情况，由于问题过于复杂，很难用一个固定的程序来处理．相对于上述所谓的程序型决策，把它称为非程序型的，自然，这种分类不是绝对的．在实际生

活里遇到的决策，有些可能属于完全程序型，有些则属于完全非程序型，但更多的是处于两者之间，或侧重于前者，或侧重于后者．从人类社会各种组织中的基层向最高层看，一般地说，越是基层，程序型决策越多．因此，传统的运筹学方法对基层、中层人员的决策应用较多．相反，在高层则用得较少．高层组织的决策，往往是战略性、方向性，问题复杂，涉及面广，综合性强，不确定性因素多，且极少简单重复，通常没有现成程序可循，而与决策者本人的经验、能力、个性、环境等有密切关系．所以，多属非程序型．由于对高层组织而言，所需决策还有"不怕粗，但怕不对头"的特点，允许有一定机动（即不确定）的余地，因此，可以预料，模糊数学方法将在这类问题的研究或称为软科学的研究中发挥更大的作用．

目前，传统的运筹学方法如库存管理、全面质量管理、线性规划等在基层经济组织已成为常规的管理手段．但是，这些源出于西方工业发达国家的管理方法，具有强调用定量的数据说话，在处理不确定现象时重视数理统计方法等特点，而相对地忽视对企业整体的认识．例如，对各部门之间由于协同、制约等关系而出现的问题以及其他不易计量的因素，包括企业的应变能力、职工队伍的士气等，缺乏综合的分析归纳．如果说从系统论的角度，可以把人体和企业作些类比，那么，对人体的保健和疾病诊断有中西医之分，但对企业管理理论，目前似乎只有"西医"，若能借鉴中医理论，不是孤立地看待企业的各个子系统，而是从整体观

念出发，揭示各个子系统的相互联系、相互依存又相互制约的规律，来个“中西医结合”，探索出企业管理的一条新路，将是很有意义的．因此，不论是在用于高层的领导科学，还是在用于基层的企业管理理论的研究中，模糊数学应该能够做出自己的贡献．

3　语言学、文学及其他

人的自然语言特有的模糊性，使语言学家对模糊集论方法有特殊的兴趣．

1972年，在纽约举行了一次关于词典学的讨论会，会上著名语言学家拉科夫作了一个在词汇方面运用模糊理论的报告．一位语言学家在讨论这个报告时说：“我很高兴得知存在着‘模糊集合’这样一种东西．回想五十年代给语言范畴下定义时，我们都力求非常精确．因此我那时要有足够的勇气才敢于说：象形容词这样的词只在中心才是十分清晰的，到了边缘就越来越模糊……对我当时所谈论过的事情，我现在有了一个可爱的术语：‘模糊集合’．”另一位语言学家也说：“……在四十年代我因未能尝试用模糊界线定义音素而失败，……五十年代我因未能用模糊界线描写词的集合而败阵，六十年代我又因未能用这种方法定义某些语法结构而失利．”

事实证明，从模糊集的角度考察语言现象，为语言学研究开辟了新的途径．

顺便指出，二十年前，当查德刚刚提出模糊集的概念时，大多数数学家特别是理论数学家是持怀疑甚至否定态度的．可是，苏联一位最著名的数学家 И. M. 盖里范特院士却敏锐地看出查德的工作的意义，并且建议查德应用模糊集论方法研究人的自然语言．盖里范特在苏联数学界是以洞察力和预见性著称．他的这一建议是战略性的．今天，人们发现对自然语言的定量研究不仅加深了我们对语言规律的理解，而且和人工智能以及新型计算机的研究有极为密切的联系．这再次证实了这位数学家的远见卓识．

当语言学家为获得模糊集这一工具而感到高兴时，模糊集的概念也进入了文学艺术领域．我国一位文艺理论家首次用模糊集的概念讨论了文艺作品中人物性格的模糊性与明确性问题．他指出“模糊性是艺术形象的本质特点，也是人物形象的本质特点之一”，“用最精确的数学方法来要求艺术，反而距离艺术最远”，“人的内心世界中的大量模糊现象，是经典数学无法描绘清楚的，用形式逻辑也不可能描绘清楚．”

事实上，当我们还是孩子的时候，看电影每当出现一个新人物，总是要问“好人还是坏人”，把所有的人都区分为好人和坏人两种，当然十分明确而不模糊，但也十分不真实而毫无艺术性可言．可惜，我们有些文学作品真就这样：“好人”完全无缺点，形象极为高大；“坏人”头上长疮脚下流脓，坏透了！真实世界中的好人，本质上好，但有缺点、有错误，有时使人恨．真实世界中的坏人，本质上坏，但有

时也有可取之处．爱中有恨，恨中有爱，“坏”中有“好”，“好”中有“坏”，构成了极其丰富、复杂的人的内心世界．

模糊数学得以进入原本与数学毫不“搭界”的文学领域，因为它是一门适用于定性研究的数学．社会科学需要适于定性处理而不单纯是精密定量的数学．一个人的思想感情变化远比太阳系的轨道来得复杂，经典数学可以很好地描述太阳系各行星的运动轨道，但在人的七情六欲面前却显得苍白无力．现在当然还不能说，模糊数学的方法为这些复杂现象的研究提供了良好的手段，但它确实是良好的开始．

近年来，自然科学奔向社会科学是一个强大的潮流，模糊数学的诞生和发展是这个潮流的需要．自然科学和社会科学的相互冲击和影响，导致了一系列交叉科学的诞生．正如许多学者所指出，交叉科学的兴起，是本世纪中期以来出现的一个重要现象．由于四十年代以后世界科学出现了一种“饱和现象”，在世界范围内形成了一种大规模的智力横向转移．在这一战略转移过程中，模糊数学弥补了经典数学过分要求精密的局限，实际上起了一种“粘合剂”的作用．在本世纪末到下世纪初，世界科学将会出现交叉科学的兴盛时代．两大学科的相互交叉和渗透，是不以人们意志为转移的历史必然，正如马克思早就说过的：“自然科学往后将包括关于人的科学，正象关于人的科学包括自然科学一样：这将是一门科学．”

4 活 的 数 学

在第二章，我们就已经指出，模糊集是通常集合在形式上的一种推广．集合论是近代数学的基础，这种基础上的变动不能不对数学本身产生潜在的、深刻的影响．因此，模糊集的提出固然是为了对模糊性进行数学处理．但另一方面，从纯数学角度看，它的提出也为数学家提供了一个更宽的框架与一些有背景的课题．例如，在经典集论中，元素或简称点和集合的“属于关系”是最基本的结构．这个结构在模糊集中应该有所反映．为此，首先应把通常点的概念推广到模糊的情况，这是容易做到的．

定义 论域 U 上的模糊子集的隶属函数若是

$$\mu(x)=\begin{cases}\lambda, & x=a;\\ 0, & x\neq a.\end{cases}$$

则称为模糊点，以 a_λ 表示，$0<\lambda\leqslant1$ 为常数．当 $\lambda=1$ 时，$a_1=a$ 为通常点．

由于把模糊点看成特殊的模糊集，而对任意两个模糊集 A、B 有

$$A\subseteq B\Leftrightarrow\mu_A\leqslant\mu_B$$

因此，很自然地会认为，若 $\lambda\leqslant\mu_A(a)$，则有 $a_\lambda\in A$．

这种想法很直观．可惜，这个表面上看很直观的想法却有严重缺陷：设有模糊集 A_n，$n=1, 2, \cdots$．令 $\mu_{A_n}(a)=$

$1-\frac{1}{n+1}$，则由于 $1-\frac{1}{n+1}<1$，所以 a 不属于 A_n 中的任一个；另一方面，若令

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

$$\mu_A(a)=\vee\mu_{A_n}(a)=\bigvee_n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

（注意，这里的符号"∨"表示"取大"，当数目无限多时，有个取极限过程），则 $a\in A$. 换句话说，a 不属于 A_n 中的任何一个，却属于所有 A_n 的并，也就是 a 不能择一而属，"择一原则"不成立. 用逻辑的语言就是，所有的命题都是假的，它们的析取却是真的. 这当然不能使人很信服.

点的模糊化，使我们讨论点和集合间关系遇到了很大困难，这个困难是本质性的，从而导致把建立在属于关系这一结构上的传统数学理论推广到模糊场合的努力遇到严重的障碍. 这个问题的解决依赖于能否建立一种结构，它是通常集论中"属于"关系的推广，但又不致于出现上述矛盾. 我国数学家证明了，在某些很一般的条件下，所设想的关系只能是所谓的"重于关系"，即

$$\lambda>1-\mu_A(a)$$

或写成

$$\mu+\lambda>1$$

其中 $$\mu=\mu_A(a).$$

这个问题的解决为一门被称为不分明拓扑学的研究开

辟了一个新方向，也为更一般、更抽象的所谓“格上拓扑学”的所谓有点化研究建立了重要的模式．在这里，数学中最基本的拓扑结构与序结构得到很好结合．

到了结束这本小书的时候，这时，我们想起 1962 年 D. 希尔伯特诞生一百周年纪念会上，著名数学家 R. 库朗在德国哥廷根发表演讲，阐述这位当代最伟大的数学家之一的工作及其对数学的重要影响．库朗说：

“两千多年以来，虽然数学一直扮演着重要角色，它却依然在随着时间而变化，尤为突出的是，它在不断地背离传统．

“我们正面临着一种危险．……其危险就在于，各种各样的力量都强调抽象的方向，致使伟大的希尔伯特学派的传统只有这一个方面被继承下来．

直观和逻辑，‘扎根于实际，问题的个别性和影响深远的抽象的一般性，这是两对矛盾着的力量，而正是矛盾各方的起伏波动决定着活的数学向前发展．所以，我们必须防止被驱赶而只向有生命力的对立的一极发展．

“我们必须把数学当作科学长河中的一个统一和有生命的支流，加以爱护，注以力量；不使它湮没在沙滩中．

“希尔伯特以他感人的榜样向我们证明：这种危险是容易防止的；在纯粹和应用数学之间不存在鸿沟，数学和科学总体之间，能够建立起果实丰满的结合体．”

确实，

模糊数学扎根于实际；

模糊数学背离了传统；

模糊数学和其他数学分支一起推动着活的数学向前发展；

模糊数学是活的数学！